Examen première session 2022-2023

Une feuille A4 manuscrite recto-verso est autorisée. Tout autre document est interdit. Les téléphones doivent être rangés. Le barème est **indicatif** et peut donc être sujet à modifications.

Numéro d'anonymat

Exercice 1: (1 point) Vrai ou faux

Dans un problème de mariage stable avec n hommes et n femmes, où chaque personne fournit un ordre de préférence (strict et complet) sur les personnes de l'autre sexe, on observe qu'il existe un groupe de $k < n$ hommes $G_H = \{h_1, \cdots, h_k\}$ et un groupe de k femmes $G_F = \{f_1, \cdots, f_k\}$ tels que :

- pour chaque homme du groupe G_H, les k premières femmes de son classement sont les femmes du groupe G_F (dans un certain ordre) ;
- pour chaque femme du groupe G_F, les k premiers hommes de son classement sont les hommes du groupe G_H (dans un certain ordre) ;

Alors dans tout mariage stable, tout homme de G_H est en couple avec une femme de G_F. Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2: (5 points) Mariage stable et Pareto-optimal

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème de mariage stable. Plus précisément, on considère un ensemble $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ de n hommes et un ensemble $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ de m femmes, avec $n > 0$ et $m > 0$, et on suppose que chaque personne fournit un ordre de préférence (strict et complet) sur les personnes de l'autre sexe.

1. (1 point) On considère l'instance avec $n = 3$ et $m = 4$ dont les préférences sont les suivantes :

h_1	f_1	f_2	f_4	f_3
h_2	f_2	f_4	f_1	f_3
h_3	f_1	f_2	f_4	f_3

f_1	h_3	h_1	h_2
f_2	h_2	h_1	h_3
f_3	h_2	h_1	h_3
f_4	h_1	h_2	h_3

Appliquez l'algorithme de Gale-Shapley côté hommes, en prenant les hommes par numéro croissant. Vous donnerez la liste des propositions, les réponses, et le mariage final obtenu.

2. (1.5 points) Même question pour Gale-Shapley côté femmes. Qu'observez-vous concernant l'identité de la personne célibataire ? Est-ce que ce résultat se généralise ? (justifiez votre réponse)

3. (2 points) Pour l'instance suivante, donnez l'ensemble des mariages Pareto-optimaux. On suppose que les utilités sont définies par les scores de Borda, et qu'être célibataire correspond à une utilité négative (-1 par exemple). Justifiez votre réponse.

h_1	f_1	f_2	f_3
h_2	f_2	f_1	f_3

f_1	h_1	h_2
f_2	h_2	h_1
f_3	h_2	h_1

4. (0.5 point) Qu'observez-vous concernant les personnes célibataires dans les mariages Pareto-optimaux ?

Exercice 3: (4 points) **Véracité garantie**

Pour l'anniversaire de votre amie Alice, vous donnez rendez-vous à ses autres amis pour se mettre d'accord sur le prix de son cadeau. Chaque personne i a un prix idéal en tête v_i et aimerait que le prix effectif p soit le plus proche possible de v_i (plus précisément, elle cherche à minimiser la quantité $|v_i - p|$). Vous cherchez un bon mécanisme pour décider du prix du cadeau.

1. (1.5 point) Quelqu'un propose le mécanisme suivant : chaque personne donne un prix p_i et le prix du cadeau p sera la moyenne des p_i. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? (réponse à prouver).

2. (2.5 points) On considère maintenant un autre mécanisme : chaque personne donne un prix p_i et le mécanisme donne comme prix du cadeau p le prix médian. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? (réponse à prouver). Rappel : L'élément médian d'un ensemble de n entiers est le $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ième entier dans l'ordre croissant.

Exercice 4: (5 points) **Agents autonomes : comportements réactifs, optimisation stochastique**

Répondez *brièvement* aux questions suivantes.

1. (2 points) Etant donné un comportement *aller-vers-la-lumière*, un comportement *éviter-le-mur* et un comportement *aller-tout-droit*, dessinez l'architecture de Subsomption qui permet d'éviter les obstacles et d'aller vers la lumière en utilisant exclusivement les trois modules pré-cités. Le robot ne doit jamais s'arréter.

2. (1 point) Même question, mais en écrivant la réponse sous forme d'arbre de comportement

3. (1 points) Décrivez l'opérateur de sélection par tournoi. Comment garantir qu'on choisisse le meilleur individu ?

4. (1 point) Décrivez l'opérateur de sélection $(\mu + \lambda)$

Exercice 5: (5 points) **Théorie des jeux et dynamique multi-agents**

On considère un jeu à deux joueurs 1 et 2 qui cherchent à maximiser leurs propres gains, où 1 peut jouer les actions a, b, tandis que 2 peut jouer c, d, ou e. La matrice donnant les gains pour, respectivement, le joueur 1 et le joueur 2, est donnée ci-dessous :

1\2	c	d	e
a	$(3,1)$	$(2,-5)$	$(1,6)$
b	$(5,0)$	$(3,1)$	$(0,-2)$

1. (1 point) Pour chacun des joueurs, indiquez si certaines de leurs actions (stratégies) sont *dominées* (faiblement ou strictement).

2. (1 point) On suppose que chaque joueur est *prudent*, au sens où il joue l'action qui lui donne la garantie de gain minimale (quelque soit l'action jouée par l'autre joueur) la meilleure. Indiquez les actions choisies par les deux joueurs. S'agit-il d'un équilibre de Nash ?

3. (1 point) Donnez tous les équilibres de Nash de ce jeu. (Ou justifiez pourquoi il n'en existe pas).

4. (1 point) On suppose que le jeu est *répété*. Si les joueurs ne disposent d'aucune information a priori (et jouent leur premier coup en supposant que l'autre joueur va joueur selon une distribution uniforme), indiquez les *deux* premiers coups qui seraient joués selon la dynamique de *fictitious play*.

5. (1 point) Le jeu est à présent joué *en séquence*. En supposant que 1 joue en premier, indiquez quel est le résultat du jeu en appliquant le principe d'induction à rebours. (Dessinez l'arbre).