Examen première session 2020-2021

Une feuille manuscrite ou imprimée recto-verso est autorisée. Tout autre document est interdit. Les téléphones doivent être rangés. Le barème est **indicatif** et peut donc être sujet à modifications.

Numéro d'anonymat

Exercice 1: (10 points) Affectation et cycles optimaux

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème d'affection des internes dans les hôpitaux. Pour simplifier l'exercice, on suppose ici qu'il y a autant d'internes que d'hôpitaux, et que chaque hôpital ne peut accueillir qu'un seul interne. Notons $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ l'ensemble des internes, et $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ l'ensemble des hôpitaux, avec $n > 0$.

1. (1 point) Considérons l'instance avec $n = 3$ dont les préférences sont les suivantes :

i_1	h_2	h_1	h_3
i_2	h_1	h_2	h_3
i_3	h_1	h_2	h_3

h_1	i_1	i_3	i_2
h_2	i_2	i_1	i_3
h_3	i_2	i_1	i_3

Appliquez l'algorithme de Gale-Shapley côté internes, en prenant les internes par numéro croissant. Vous donnerez la liste des propositions, les réponses, et l'affectation finale obtenue.

Proposition	Décision	Mariage
$i_1 : h_2$	h_2 accepte	$(i_1 - h_2)$
$i_2 : h_1$	h_1 accepte	$\{(i_1 - h_2), (i_2 - h_1)\}$
$i_3 : h_1$	h_1 accepte	$\{(i_1 - h_2), (i_3 - h_1)\}$
$i_2 : h_2$	h_2 accepte	$\{(i_2 - h_2), (i_3 - h_1)\}$
$i_1 : h_1$	h_1 accepte	$\{(i_2 - h_2), (i_1 - h_1)\}$
$i_3 : h_2$	h_2 refuse	$\{(i_2 - h_2), (i_1 - h_1)\}$
$i_3 : h_3$	h_3 accepte	$\{(i_2 - h_2), (i_1 - h_1), (i_3 - h_3)\}$

2. (1 point) Une affectation A est dite *Pareto-optimale pour les internes* si et seulement si, pour toute affectation A' telle que $A' \neq A$, il existe au moins un interne qui préfère strictement son hôpital dans A que dans A'. En vous aidant de la question précédente, montrer que l'algorithme de Gale-Shapley ne retourne pas forcément une affectation Pareto-optimale pour les internes.

La solution retournée par Gale-Shapley sur l'instance de la question 1 est $\{(i_1 - h_1), (i_2 - h_2), (i_3 - h_3)\}$. Cette affectation n'est pas Pareto-optimale pour les internes car celle-ci est Pareto-dominée par l'affectation $\{(i_1 - h_2), (i_2 - h_1), (i_3 - h_3)\}$. En effet, i_1 préfère h_2 à h_1, i_2 préfère h_1 à h_2, et i_3 est avec h_3 dans les deux affectations. Cette exemple montre donc que Gale-Shapley ne retourne pas forcément une solution Pareto-optimale pour les internes.

Dans la suite de cet exercice, on va s'intéresser à un autre algorithme, que l'on va appeler *algorithme à circuits optimaux*. Cet algorithme utilise le graphe orienté suivant :

— Les sommets du graphe représentent les agents. Autrement dit, le graphe contient un sommet par interne et un sommet par hôpital.

— Les arcs du graphe représentent les premiers choix. Plus précisément, le graphe contient l'arc (i, h) si et seulement si l'hôpital h est le premier choix de l'interne i, et contient l'arc (h, i) si et seulement si i est le premier choix de h.

3. (1.5 points) Montrez que le graphe contient au moins un circuit. Montrez que chaque interne est dans au plus un circuit, et que chaque hôpital est dans au plus un circuit.

Montrons que le graphe contient au moins un circuit. Supposons que le graphe ne contienne pas de circuit. Comme tous les sommets possèdent un arc pointant vers un autre noeud du graphe, alors en partant de n'importe quel sommet S_1 du graphe, on peut construire une séquence de noeuds $(S_1, \ldots, S_m)$ de taille $m > 1$ quelconque, où (S_i, S_{i+1}) est un arc du graphe pour tout $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Comme le graphe ne contient pas de cycle, alors on doit avoir $S_i \neq S_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Or, le graphe ne contient qu'un nombre fini de noeuds (exactement $2n$ noeuds) tandis que m peut être arbitrairement grand. Contradiction.

Montrons que chaque interne/agent est dans au plus un circuit. Supposons qu'il existe un sommet S qui appartienne à deux circuits élémentaires différents : $C_1 = (S, S_1, \ldots, S_k, S)$ et $C_2 = (S, S'_1, \ldots, S'_m, S)$. Comme chaque sommet ne possède qu'un seul arc sortant, alors à partir du sommet S, on obtient les mêmes séquences de noeuds en empruntant les arcs du graphe. De ce fait, on a forcément $k = m$ et $S_i = S'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Contradiction.

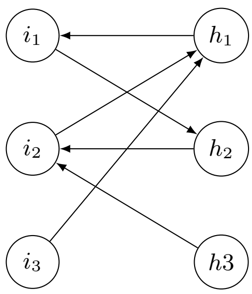
L'algorithme à circuits optimaux consiste à itérer les étapes suivantes :

1. Construction du graphe orienté.
2. Pour chaque arc (i, h) présent dans un circuit du graphe, on affecte l'interne i dans l'hôpital h.
3. On retire du problème tous les internes et tous les hôpitaux qui ont été affectés (on les retire aussi de toutes les listes de préférences).

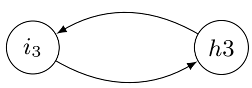
L'algorithme itère ces étapes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'internes à affecter.

4. (1 point) Appliquez l'algorithme à circuits optimaux sur l'instance de la question 1. Vous donnerez le graphe et les affectations réalisées à chaque itération.

À la première itération, on a le graphe suivant :



Dans ce graphe, on a un seul circuit : $(i_1, h_2, i_2, h_1, i_1)$. On obtient donc le mariage $\{(i_1, h_2), (i_2, h_1)\}$. À l'itération suivante, on a le graphe suivant :



Dans ce graphe, on a un seul circuit : (i_3, h_3, i_3). On obtient donc le mariage $\{(i_1, h_2), (i_2, h_1), (i_3, h_3)\}$. L'algorithme s'arrête puisque tous les agents ont été affectés.

5. (1.5 points) Montrez que l'affectation retournée par l'algorithme à circuits optimaux est forcément Pareto-optimale pour les internes.

Soit A la solution retournée par l'algorithme. Supposons que A n'est pas Pareto-optimale pour les internes. Dans ce cas, il existe une affectation $A' \neq A$ telle que chaque interne i préfère l'hôpital $A'(i)$ à l'hôpital $A(i)$, et au moins un interne i préfère strictement $A'(i)$ à $A(i)$. Soit i_0 un interne avec une préférence stricte pour son hôpital dans A'. Notons j_0 l'itération de l'algorithme où i_0 a été affecté à $A(i_0)$. À cette itération, l'hôpital $A(i_0)$ est le premier choix de i_0 parmi les hôpitaux non encore affectés. Comme i_0 préfère strictement $A'(i_0)$ à $A(i_0)$, alors on sait que l'hôpital $A'(i_0)$ a été affecté par l'algorithme à un agent i_1 à une itération $j_1 < j_0$. Comme $A(i_1) = A'(i_0)$, alors on a forcément $A(i_1) \neq A'(i_1)$. Comme en plus A' Pareto-domine A, alors de $A(i_1) \neq A'(i_1)$ on peut déduire que i_1 préfère strictement $A'(i_1)$ à $A(i_1)$. On peut donc itérer le raisonnement sur i_1. Plus précisément, en itérant k fois ce raisonnement à partir de i_1, pour un entier k **quelconque**, on peut donc construire une séquence de $k + 1$ itérations $(j_0, \dots, j_{k+1})$ (et une séquence d'internes $(i_0, \dots, i_{k+1})$ associée) telle que $j_i > j_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. Or, le nombre d'itérations est **bornée**. Contradiction.

6. (1 point) Dans le cours, nous avons vu que l'algorithme de Gale-Shapley côté internes est à véracité garantie pour les internes. Est-ce le cas pour l'algorithme à circuits optimaux ? Justifiez votre réponse.

Oui, la procédure est à véracite garantie pour les internes : il est impossible pour un interne i d'obtenir un meilleur hôpital en mentant sur ses préférences, même en connaissant les préférences des autres. En effet, comme i est affecté à son premier choix à une itération, alors on sait que tous les hôpitaux que i préfère au sien ont été affectés à des itérations précédentes. Ces affectations ont été réalisées parce qu'ils existaient des circuits comprenant ces hôpitaux et d'autres internes. L'existence de ces circuits dépend uniquement des préférences de ces hôpitaux et de ces internes, et donc en mentant sur ses préférences, l'interne i ne peut pas "casser" ces circuits et donc ne peut pas empêcher ces affectations.

7. (1 point) Dans le cours, nous avons vu que l'algorithme de Gale-Shapley retourne toujours une affectation stable. Est-ce le cas pour l'algorithme à circuits optimaux ? Justifiez votre réponse.

Non, il suffit de prendre l'instance de la question 1 comme contre exemple. L'algorithme à circuits optimaux retourne $\{(i_1, h_2), (i_2, h_1), (i_3, h_3)\}$ qui n'est pas stable, puisque la paire (i_3, h_1) est une paire instable (i_3 préfère h_1 à h_3, et h_1 préfère i_3 à i_2).

8. (2 points) Dans cette question, on s'intéresse à un autre type de stabilité. Une affectation est dite *interne-stable* s'il n'existe aucune paire (i, i') telle que l'interne i préfère l'hôpital de l'interne i', et l'interne i' préfère l'hôpital de l'interne i. Montrer que l'algorithme à cycles optimaux est interne-stable. Qu'en est-il pour l'algorithme de Gale-Shapley ? Justifiez votre réponse.

Montrons que l'algorithme à circuits optimaux retourne une affectation interne-sable. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une paire (i, i') telle que l'interne i préfère l'hôpital de i', et vice versa. Notons j_i l'itération où l'interne i a été affecté. Comme i prefère $A(i')$ à $A(i)$, et que l'interne i a été affecté à l'itération j_i à son premier choix parmi les hôpitaux non affectés, alors on en déduit que l'interne i' a été affecté à l'hôpital $A(i')$ à une itération $j_{i'} < j_i$. Par ailleurs, comme i' prefère $A(i)$ à $A(i')$, on peut montrer par un raisonnement similaire que $j_{i'} > j_i$. Contradiction.

Montrons que l'algorithme de Gale-Shapley côté internes ne retourne pas forcément une allocation interne-stable. Prenons l'instance 1 comme contre exemple. L'algorithme retourne $\{(i_1, h_1), (i_2, h_2), (i_3, h_3)\}$ qui n'est pas interne-stable, puisque i_1 préfère l'hôpital de i_2, et vice versa.

Exercice 2: (4 points) **Agents autonomes : comportements réactifs, optimisation stochastique**

Répondez *brièvement* aux questions suivantes.

1. (1 point) Etant donné un comportement *aller-vers-la-lumière* et un comportement *éviter-le-mur*, dessinez l'architecture de Subsomption qui permet d'éviter les obstacles et d'aller vers la lumière en utilisant exclusivement les deux modules pré-cités.

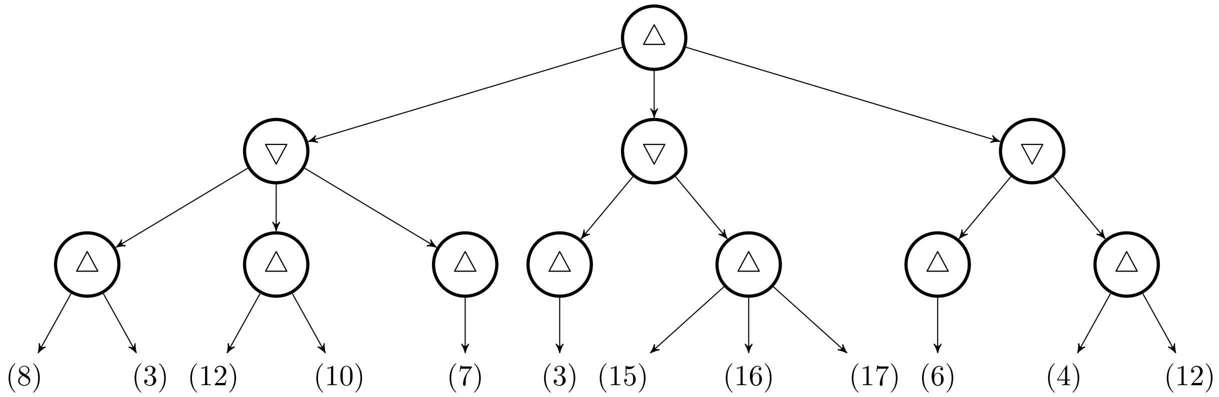
2. (1 point) Décrivez l'opérateur de sélection $(\mu + \lambda)$

3. (1 point) Décrivez l'opérateur de sélection par tournoi

4. (1 point) Quelle est la pression de sélection si $k = 1$ pour une sélection par tournoi ?

Exercice 3: (1.5 points) **Jeux à deux joueurs**

Considérons le graphe suivant. Les nœuds correspondent aux différents états. Les valeurs sur les feuilles indiquent le gain obtenu. Le graphe représente un jeu à somme nulle entre un joueur *max* ($\triangle$) et un joueur *min* ($\bigtriangledown$), en supposant que le premier joueur est le joueur *max*.



1. (1.5 points) Indiquez par application de l'algorithme minimax la valeur théorique de ce jeu. Indiquez ensuite (directement sur le graphe) les élagages réalisés par l'algorithme alpha-beta (en les justifiant).

Exercice 4: (4.5 points) **Dynamique multi-agents**

On considère le jeu à deux joueurs A et B suivant : chaque joueur peut demander de manière simultanée 6, 7, 8, 9 ou 10 bonbons. (Ce sont donc les stratégies possibles pour chaque joueur, notées **6**, **7**, **8**, **9**, **10**). Chaque joueur obtient en gain le nombre de bonbons demandés, mais si un joueur demande *exactement* 1 bonbon de moins que l'autre joueur, il obtient un bonus de 2 bonbons (en plus de ceux demandés). Chaque joueur ne se préoccupe que de son propre gain.

1. (1 point) Donnez la matrice des gains. Existe-t-il une ou des stratégies strictement dominée(s) pour les joueurs ? Justifiez votre réponse.

$A \backslash B$	6	7	8	9	10
6	$(6,6)$	$(8,7)$	$(6,8)$	$(6,9)$	$(6,10)$
7	$(7,8)$	$(7,7)$	$(9,8)$	$(7,9)$	$(7,10)$
8	$(8,6)$	$(8,9)$	$(8,8)$	$(10,9)$	$(8,10)$
9	$(9,6)$	$(9,7)$	$(9,10)$	$(9,9)$	$(11,10)$
10	$(10,6)$	$(10,7)$	$(10,8)$	$(10,11)$	$(10,10)$

On voit que les stratégies 6 et 7 sont strictement dominées par 10, évidemment pour les deux agents. (8 n'est que faiblement dominée, ce n'était pas demandé).

2. (1 point) Déterminez les équilibres de Nash de ce jeu, ou justifiez sinon qu'il n'en existe pas.

Equilibres de Nash : (9,10) et (10,9), pour des gains de (11,10) et (10,11)

3. (1 point) On suppose à présent que le bonus est de 3 bonbons pour le joueur qui demande un bonbon de moins. En limitant votre analyse aux stratégies **8**, **9**, **10**, donnez la séquence de meilleures réponses obtenue en partant de la stratégie (8,8), en supposant que A commence, puis B, puis A, etc. sur 6 étapes de la dynamique. Déterminez les équilibres de Nash de ce jeu, ou justifiez sinon qu'il n'en existe pas.

$A \backslash B$	8	9	10
8	$(8, 8)$	$(11, 9)$	$(8, 10)$
9	$(9, 11)$	$(9, 9)$	$(12, 10)$
10	$(10, 8)$	$(10, 12)$	$(10, 10)$

La séquence de meilleure réponse sera (notation vecteurs de gains) :
(8,8)-A-(10,8)-B-(10,12)-A-(11,9)-B-(8,10)-A-(12,10)-B-(9,11)-A-(10,8).. et ça boucle. Séquence de meilleure réponse (notation stratégie) :
(8,8)-A-(10,8)-B-(10,9)-A-(8,9)-B-(8,10)-A-(9,10)-B-(9,8)-A-(10,8).. et ça boucle. Il n'y a pas d'équilibre de Nash. Il suffit de montrer que les autres états non rencontrés dans le cycle (9,9) et (10,10) ne sont pas stables.

4. (1.5 point) On pose qu'un joueur de niveau 0 joue de manière aléatoire, avec une probabilité uniforme, une stratégie parmi celles possibles. On dit ensuite qu'un joueur est de niveau k lorsqu'il joue une meilleure réponse en supposant que l'autre joueur est un joueur de niveau $k-1$. Supposons que A soit un joueur de niveau 1 et B un joueur de niveau 2 : quelles stratégies vont-ils jouer ?

Pour le joueur A, on calcule la BR si l'autre joueur joue 1/3.**8** + 1/3.**9** + 1/3.**10**. Donc gain espéré pour 8 : $1/3.8 + 1/3.11 + 1/3.8 = 9$. De même gain espéré pour 9 et 10 : 10. Les deux stratégies **9** et **10** sont donc des meilleures réponses possibles. On compte les deux correctes.
L'agent de niveau 2 jouera donc la stratégie **8** si on considère que l'agent de niveau 1 joue **9**, ou bien la stratégie **9** si on considère que l'agent de niveau 1 joue **10**.