| | | |
|---|---|---|
| **Sorbonne Université** | **LRC** | M1 ANDROIDE |
| ANNÉE 2017-2018 | **Examen de 2nde session** | M1 DAC |

**Eléments de correction**
**Durée 2h - documents et calculatrices non autorisés**
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

# 1 Logique classique

**Exercice 1** – Représentation en logique – *2 points* Traduire en logique des prédicats du premier ordre les quatre propositions suivantes :

- Il n'y a pas de chat non dressé aimant le poisson.
  *Remarque* : on suppose que cela signifie qu'il aime tous les poissons
- Les chats avec moustaches aiment toujours le poisson.
- Il n'y a pas de chats avec une queue, à moins d'avoir des moustaches.

*Remarque 1* : ces propositions sont tirées d'une énigme de Lewis Caroll
*Remarque 2* : on fera appel aux prédicats $chat(x)$, $dresse(x)$, $poisson(x)$, $aime(x, y)$, $possede(x, y)$, $moustache(x)$, $queue(x)$
**Correction** :

- Il n'y a pas de chat non dressé aimant le poisson :
  $\neg\exists x(chat(x) \wedge \neg dresse(x) \wedge \forall z(poisson(z) \rightarrow aime(x, z)))$
- Les chats avec moustaches aiment toujours le poisson :
  $\forall x((chat(x) \wedge \exists y(possede(x, y) \wedge moustache(y))) \rightarrow \forall z(poisson(z) \rightarrow aime(x, z)))$
- Il n'y a pas de chats avec une queue, à moins d'avoir des moustaches.
  $\neg\exists x(chat(x) \wedge \exists y(possede(x, y) \wedge queue(y)) \vee \exists z(possede(x, z) \wedge moustache(z))))$

**Exercice 2** – Démonstration dans le système de Hilbert-Ackermann – *3 points*
Démontrer dans le système de Hilbert-Ackermann (voir annexe) que $(F \rightarrow G), (G \rightarrow H) \vdash (F \rightarrow H)$ sans utiliser le théorème de la déduction.
**Correction** :

1. $(F \rightarrow G)$ Axiome 1
2. $(G \rightarrow H)$ Axiome 2
3. $(G \rightarrow H) \rightarrow (F \rightarrow (G \rightarrow H))$ par application du schéma d'axiomes SA1
4. $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ Modus Ponens 2, 3
5. $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$ par application du schéma d'axiomes SA2
6. $((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$ Modus Ponens 4, 5
7. $(F \rightarrow H)$ Modus Ponens 1, 6
   C.Q.F.D.

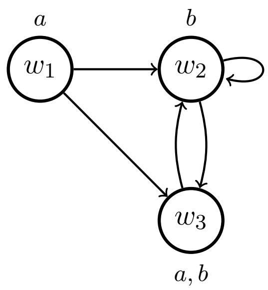
**Exercice 3** – Démonstration avec la méthode des tableaux – *3 points*
Démontrer avec la méthode des tableaux (voir annexe) la validité de la formule suivante :
$((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (F \rightarrow H)$
*Remarque* : on prendra la négation de la formule et on démontrera son insatisfiabilité
**Correction** :

1. $T_1 = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H))\}$
2. $T_2 = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H)\}$ application formule $\alpha$
3. $T_3 = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H\}$ application formule $\alpha$ sur $\neg(F \to H)$
4. $T_4 = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H, (F \to G), (G \to H)\}$ application formule $\alpha$ sur $((F \to G) \wedge (G \to H))$
5. $T_5^{'} = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H, (F \to G), (G \to H), H\}$ et
   $T_5^{"} = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H, (F \to G), (G \to H), \neg G\}$ application formule $\beta$ sur $(G \to H)$,
   on remarque qu'il y a une contradiction sur $T_5^{'}$
6. $T_6^{'} = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H, (F \to G), (G \to H), \neg G, \neg F\}$ et
   $T_6^{"} = \{\neg(((F \to G) \wedge (G \to H)) \to (F \to H)), ((F \to G) \wedge (G \to H)), \neg(F \to H), F, \neg H, (F \to G), (G \to H), \neg G, G\}$ application d'une formule $\beta$ sur $(F \to G)$ dans $T_5^{"}$
   On remarque une contradiction sur $T_6^{'}$ ($\neg F$ et $F$) et une contradiction sur $T_6^{"}$ ($\neg G$ et $G$)
   Toutes les feuilles sont contradictoires. La formule est donc invalides. C.Q.F.D.

## 2 Logique modale et épistémique

**Exercice 4** – Logique modale (système K)– *5 points*

1. Indiquez en justifiant vos réponses si les formules suivantes sont valides, satisfiables, ou insatisfiables dans le système $K$ :
   (i) $\Diamond a \to \Diamond(b \vee \neg b)$
   (ii) $\Box\neg a \to \neg\Box a$
2. On définit la structure de Kripke $M$ suivante :




   Indiquez si les assertions suivantes sont vraies, en justifiant vos réponses :
   (i) $M, w_3 \models \Box\Box a$
   (ii) $M, w_1 \models \Box(b \wedge \Diamond\Diamond a)$

**Correction** :

1. (i) valide : supposons que ce ne soit pas le cas. Prenons un monde $w$ où la formule est falsifiée (c'est une implication, donc (i) sa prémisse doit être vraie et (ii) sa conclusion fausse). Comme (i) il existe un monde $w'$ tq. $M, w' \models a$. Comme (ii) il ne doit pas exister de monde accessible depuis $w$ où $b \vee \neg b$ est vraie. Or c'est une tautologie, c'est donc vrai en n'importe quel monde , au moins en $w'$, accessible depuis $w$. Contradiction.
   (ii) la formule est évidement satisfiable (il suffit de construire un modele où la prémisse est falsifiée, par un monde unique reflexif sur lequel $a$ est vrai), mais elle n'est pas valide. En effet sur un monde sans successeur, on a la prémisse vraie (trivialement, car pas de monde accessible), tandis que la conclusion est fausse (puisque pour la même raison, $\Box a$ est vraie).

2. (i) non, (ii) oui

**Exercice 5** – Logique épistémique S5 – *2 points*

1. Montrez que $\neg\phi \to K\neg K\phi$ est une formule valide.
2. On souhaite modéliser le fait que "tout ce que l'agent $i$ sait, l'agent $j$ le sait aussi" (ce qui peut traduire le fait que $j$ est plus compétent que $i$). Donnez une condition sur la structure de Kripke permettant de capturer cette notion.

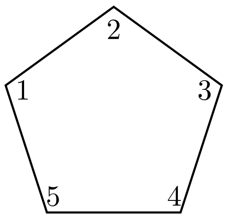
**Correction** :

1. En utilisant les axiomes, ou semantiquement : Supposons faux, alors il doit exister un monde $w$ où : (i) $M, w \models \neg\phi$ est vrai, (ii) $M, w \models K\neg K\phi$ est fausse. Donc il doit exister un monde $w^*$ accessible depuis $w$ tel que $M, w^* \not\models \neg K\phi$, autrement dit un monde $w^*$ où $M, w^* \models K\phi$. Mais dans tous les mondes accessibles depuis $w^*$, on doit avoir $\phi$. Or par symétrie, on a $w$ accessible depuis $w^*$. Or contradiction d'après (i).
2. il faut que la relation d'accessibilité de $j$ soit incluse dans celle de $i$.

**Exercice 6** – Modélisation et annonces publiques (la carte jaune) — *6 points*

*On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5.*

Un jeu de cartes est composé de 5 cartes : 2 cartes rouges ($R$), 2 cartes bleues ($B$), et 1 carte jaune ($J$). 5 agents sont disposés en "cercle", comme indiqué sur la figure, de telle manière que chaque agent ne voit que les cartes de ses deux voisins. Les agents ne voient pas leur propre carte. Ainsi, par exemple, l'agent 2 voit les cartes de l'agent 1 et de l'agent 3.




1. On modélise un monde possible comme une attribution (valide selon les spécifications du problème) d'une couleur à chaque agent. Cette modélisation induit-elle 120, 30, ou 12 mondes possibles ? Justifiez votre réponse.
2. L'agent 1 annonce "Je sais que mes voisins ont des cartes de la même couleur". Après cette annonce, seuls subsistent 6 mondes possibles. Représentez la structure de Kripke résultante, avec les relations d'accessibilité des agents 1, 2, 3, 4 et 5.
3. Est-il vrai, après cette annonce, que :
   - les agents 2 et 5 savent qui possèdent la carte $J$ ;
   - les agents 3 et 4 ne savent pas qui possède la carte $J$ ;
   - les agents 3 et 4 ont la connaissance distribuée de qui possède la carte $J$.

   Vous justifierez votre réponse en vous appuyant sur la structure de Kripke obtenue.

**Correction** : L'exercice est corrigé en TD.

# 3 Annexe

## 3.1 Système de Hilbert

**Rappel : le système de Hilbert pour la logique des propositions**

Le système de Hilbert est caractérisé par trois schémas d'axiomes et une règle d'inférence :
• Schémas d'axiomes :
**SA1 :** $A \to (B \to A)$
**SA2 :** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
**SA3 :** $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
• Règle d'inférence
**Règle :** $A, A \to B \vdash B$ (modus ponens)

• La déduction d'une formule A dans une théorie $\Delta$ est une suite finie $A_0, \ldots, A_n$ telle que $A_n = A$ et pour tout $i$,
- $A_i$ est l'instanciation de l'un des axiomes,
- $A_i$ est l'une des hypothèses, c'est-à-dire $A_i \in \Delta$
- $A_i$ est obtenue par modus ponens appliqué à $A_j$ et $A_k$ avec $j < i$ et $k < i$.

On peut aussi appliquer toutes les substitutions nécessaires, à condition de les effectuer dans l'ensemble de la formule.
Si on trouve une telle suite, on peut noter $\Delta \vdash A$

On peut de plus utiliser le théorème de la déduction :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \quad \text{si et seulement si} \quad A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$$

## 3.2 Méthode des tableaux sémantiques pour la logique des propositions

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

### 3.2.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés $\alpha$ et $\beta$.

| Formule $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\neg\neg\varphi$ | $\varphi$ | $\varphi$ |
| $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$ | $\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ | $\varphi_1 \to \varphi_2$ | $\varphi_2 \to \varphi_1$ |

| Formule $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi_1 \vee \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $\varphi_1 \to \varphi_2$ | $\neg\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_2 \to \varphi_1)$ |

### 3.2.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  — si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  — sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert

- sinon, choisir une formule $F$ de l'étiquette du nœud
  - si elle est de type $\alpha$
    - créer un sous-nœud marqué comme non traité
    - lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$
  - sinon (si elle est de type $\beta$)
    - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
    - leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.