Projet Collectif 2019-2020

Le barême est **indicatif** et peut donc être sujet à modifications.

Exercice 1: Résolution par programmation linéaire

Une petite entreprise commercialise deux types de couteaux, notés A et B, réalisés à partir de trois matières premières, notés P_1, P_2 et P_3. Plus précisément, un couteau de type A est réalisé en utilisant 50 grammes de P_1 et 20 grammes de P_2, tandis qu'un couteau de type B requiert exactement 60 grammes de P_2 et 100 grammes de P_3. Chaque semaine, l'entreprise peut utiliser exactement 14 kg de P_1, 21 kg de P_2 et 63 kg de P_3. Par ailleurs, ces couteaux sont obtenus à l'aide d'une machine qui produit chaque couteau de type A en 2 minutes et chaque couteau de type B en 1 minute, mais des contraintes techniques limitent son utilisation à 5 heures par jour. Enfin, pour des raisons de capacité de stockage, l'entreprise peut réaliser 100 couteaux (de type A ou B) par jour au maximum. Sachant que chaque couteau de type A rapporte 1 euro, contre 4 euros pour un couteau de type B, l'entreprise souhaite déterminer la stratégie de production qui lui permettrait de maximiser ses gains.

1. Formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire (en nombres entiers).

2. Résoudre ce problème par la méthode de résolution graphique vue en cours (et en TD).

Exercice 2: Sur le problème des mariages stables

On considère le problème de mariage stable avec un ensemble $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ de 4 hommes et un ensemble $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de 4 femmes, dont les préférences sont les suivantes :

h_1	f_1	f_4	f_2	f_3
h_2	f_3	f_2	f_1	f_4
h_3	f_3	f_1	f_4	f_2
h_4	f_3	f_1	f_2	f_4

f_1	h_2	h_3	h_4	h_1
f_2	h_2	h_1	h_4	h_3
f_3	h_3	h_4	h_1	h_2
f_4	h_1	h_3	h_2	h_4

.

1. Appliquer l'algorithme de Gale-Shapley côté hommes. Pour les propositions, on prendra les hommes par numéro croissant. On donnera la liste des propositions, les réponses et le couplage stable final.

2. Existe-il d'autres couplages stables ? Justifier.

3. On suppose maintenant que les utilités des personnes sont définies par les scores de Borda. Quels sont les scores associés à ce problème ?

4. Déterminer le couplage qui maximise la somme des utilités et donner sa valeur. Ce couplage est-il stable ? Justifiez vos réponses.

5. Déterminer le couplage qui maximise l'utilité la plus faible et donner sa valeur. Ce couplage est-il stable ? Semble-t-il plus équitable que ceux obtenus aux questions 1 et 4 ?

Exercice 3: Sur le problème des hôpitaux et des internes

Dans cet exercice, on s'intéresse à une version simplifiée du problème des hôpitaux et des internes. Plus précisément, on considère un ensemble de n internes et un ensemble de k hôpitaux dont la somme des capacités est égale à n, et on ne s'intéresse qu'aux préférences des internes.

1. Proposer une méthode efficace permettant de déterminer une affectation des internes aux hôpitaux qui maximise la somme des utilités des internes. Même question pour maximiser l'utilité la plus faible.

2. Supposons maintenant que tous les internes sont en couple, et que chaque couple demande à ne pas être séparé. Dans ce contexte, une affectation des internes aux hôpitaux est dite *acceptable* si aucun couple n'est séparé.

a) Montrer qu'il n'existe pas toujours d'affectation acceptable. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une affectation acceptable.
b) Proposer une méthode efficace permettant de déterminer une affectation acceptable qui maximise la somme des utilités. Même question pour maximiser l'utilité la plus faible.
c) Vos algorithmes sont-ils à véracité garantie ? Justifier.

Exercice 4: Une variante des mariages stables

Dans cet exercice, on propose d'étudier une variante du problème des mariages stables. On parlera ici d'un ensemble C de candidats et d'un ensemble P de postes. Soit M et M' deux allocations données. On dit qu'une allocation est *majoritairement préférée pour les candidats* si le nombre de candidats qui préfèrent M à M' est plus grand que le nombre de candidats qui préfèrent M' à M. On dit qu'une allocation M est majoritairement optimale s'il n'existe pas d'allocation M' qui lui soit majoritairement préférée.

Considérons par exemple l'instance suivante avec un ensemble $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ de 3 candidats et un ensemble $F = \{p_1, p_2, p_3\}$ de 3 postes. Les préférences des candidats sont les suivantes (les postes n'ont pas ici de préférences).

c_1	p_2	p_1	p_3
c_2	p_2	p_3	p_1
c_3	p_3	p_1	p_2

On constate par exemple que l'allocation $M_1 = \{(c_1, p_1), (c_2, p_2), (c_1, p_3)\}$ est majoritairement préférée à l'allocation $M_2 = \{(c_1, p_2), (c_2, p_3), (c_3, p_1)\}$, et qu'elle est en fait majoritairement optimale.

1. Existe-t-il toujours une allocation majoritairement préférée pour les candidats ? Si oui, justifiez votre réponse. Si non, proposez donnez un contre-exemple.

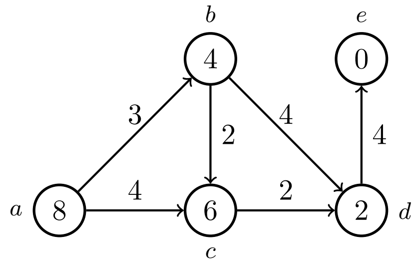
2. Est-il vrai que la procédure simple suivante permet toujours de trouver une allocation majoritairement préférée, s'il en existe un (que cette existence soit garantie ou pas, selon ce que vous avez répondu à la question précédente) :

1. On classe les candidats dans un ordre quelconque,
2. On demande à chaque candidat, dans l'ordre fixé, de choisir leur poste préféré (parmi ceux qui restent disponibles).

3. On appelle un poste un *premier choix* si ce poste apparait comme premier choix pour au moins un des candidats. Montrer que tout poste premier choix est nécessairement alloué à un des candidats qui le classe en premier dans un mariage majoritaire optimal.

Exercice 5: Recherche dans les graphes d'états

Sur le schéma suivant, les valeurs dans le noeud représente une heuristique donnant la valeur du plus court chemin permettant d'atteindre l'état e.



1. Indiquez si l'heuristique est *admissible*. Si oui, justifiez votre réponse. Si ce n'est pas le cas, corriger l'heuristique de manière à garantir l'admissibilité (en modifiant le moins de valeurs possibles).

2. Indiquez si l'heuristique ainsi obtenue est *consistante*. Si oui, justifiez votre réponse. Si ce n'est pas le cas, corriger l'heuristique de manière à garantir la consistance.

3. Indiquez, étape par étape, quelle serait l'éxécution de l'algorithme A^* (après correction éventuelle efféctuée aux questions 1. et 2.).

Exercice 6: Modélisation sous forme de graphe d'états

Un enfant joue sur la plage, en tenant une glace dans une main. Devant lui se trouve un empilement de n galets très plats, qui sont tous de couleurs différentes. L'enfant souhaiterait présenter les galets en ordre dégradé de couleur : des plus foncés (en bas) aux plus clairs (en haut). Ne disposant que d'une seule main, il peut utiliser une pelle, la placer entre deux galets, retourner complètement la portion supérieure des galets (ceux aux dessus de la pelle). Partant d'une disposition quelconque, le problème est donc d'atteindre l'état but où les galets sont bien classés par couleurs de plus en plus foncées .

1. Proposez une représentation du problème.

2. Combien d'états comporte le problème ?

3. Quel est le facteur de branchement de ce problème ?

4. Proposez une ou plusieurs heuristiques admissibles pour ce problème.

Exercice 7: Autour de la noton d'heuristique

Dans le jeu des tours de Hanoï, trois emplacements peuvent être utilisées pour poser des disques de tailles différentes. Initialement, les disques sont disposés du plus petit au plus large, de haut en bas, sur l'emplacement de gauche, et il s'agit de les déplacer sur l'emplacement de droite, en retrouvant l'ordre du plus petit au plus large. Pour cela, il est possible d'utiliser l'emplacement du milieu, mais tout état intermédiaire du jeu doit respecter la contrainte qu'un disque plus grand ne peut pas se trouver au dessus d'un disque plus petit. On supposera ici que le jeu ne comporte 4 disques.

1. Quel est le facteur de branchement de ce problème ?

2. On propose un certain nombre d'heuristiques pour résoudre ce problème :

— h_a = "nombre de disques sur l'emplacement de gauche"
— h_b = "4 - nombre de disques sur l'emplacement de droite"
— h_c = "2 fois la hauteur de la plus grande pile qui n'est pas sur l'emplacement de droite"
— h_d = "2 fois le nombre de disques sur l'emplacement de droite pour lesquels il y a un disque plus grand sur l'emplacement de gauche ou au milieu"
— h_e = "4 fois le nombre de disques qui ne sont pas sur l'emplacement de droite"

Pour chacune de ces heuristiques, pouvez-vous indiquer, en justifiant vos réponses, si elles sont admissibles ou pas ?

On s'intéresse à présent à la notion de qualité des heuristiques. On dira qu'une heuristique h_1 est plus informative qu'une heuristique h_2, si pour tout neoud n, on a $h_1(n) \geq h_2(n)$, avec $h_1(n) > h_2(n)$ pour certains nœuds n.

3. Indiquez, parmi les heuristiques présentées ci-dessus que vous avez identifiées comme étant admissibles, si certaines sont plus informatives que d'autres.

4. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "plus une heuristique est informative, plus l'éxécution de A^* est efficace (ie. moins de nœuds sont étendus lors de l'éxécution de l'algorithme)." Justifiez votre réponse.