

Le barème, sur 40, est donné à titre indicatif.

## Intervalles de Allen

On considère la situation suivante :

Alors qu'il est chez lui, Jean reçoit une notification d'envoi d'un colis. Il reste alors chez lui jusqu'à finalement recevoir une notification de non-livraison pour cause d'absence. Peut-on en déduire que le livreur n'a pas vérifié qu'il était présent lors de sa tournée ?

### Exercice 1 – Graphe temporel (6 pts)

On considère trois intervalles de Allen  $t_E$ ,  $t_H$  et  $t_A$  correspondant respectivement à la notification d'envoi de colis, une période où Jean est chez lui et la notification d'abandon de livraison.

On donne les relations suivantes entre ces intervalles

- $C_1 : t_E\{d\}t_H$ . La notification d'envoi s'est déroulée entièrement pendant la période où Jean était à domicile.
- $C_2 : t_H\{e^t\}t_A$ . La période considérée où Jean est chez lui se termine par la réception de la notification d'abandon de livraison.

1. Construire le graphe temporel complet entre  $t_E$ ,  $t_H$  et  $t_A$ .

On considère maintenant un intervalle de Allen supplémentaire  $t_L$  correspondant au passage du livreur tel que

- $C_3 : t_E\{<\}t_L$ .
- $C_4 : t_L\{<\}t_A$ .

La propagation de  $C_3$  est donnée (il n'est pas demandé de la refaire) : elle a pour seul effet de mettre à jour la contrainte entre  $t_H$  et  $t_L$  en  $t_H\{<, m, o, e^t, d^t\}t_L$ .

2. Propager la contrainte  $C_4$  entièrement en détaillant toutes les étapes pour les arcs étiquetés par plusieurs relations (le graphe n'est pas contradictoire aussi les arcs comportant une seule relation ne sont pas modifiés lors de ces mises à jour).

Cette propagation doit notamment aboutir à dériver la contrainte  $t_L\{d\}t_H$  que l'on nomme  $C_5$ .

3. Donner le graphe temporel final complet et proposer une représentation graphique sur un axe temporel de ces 4 intervalles.

### Exercice 2 – Logique réifiée de Allen (10 pts)

On formalise la situation de non-livraison de l'exercice précédent en logique réifiée de Allen avec les éléments suivants :

- Les constantes sont  $j$  représentant Jean,  $c$  qui représente le colis ainsi que les constantes d'intervalles de temps  $t_E$ ,  $t_H$  et  $t_A$  de l'exercice précédent (et d'autres qui seront obtenues par skolemisation).
- Les fluents sont de la forme  $atHome(P)$  où  $P$  est une personne
- Les événements possibles sont :
  - $nEnv(C, D)$  : notification d'envoi du colis  $C$  au destinataire  $D$
  - $nAb(C, D)$  : notification d'abandon de livraison du colis  $C$  pour cause d'absence de son destinataire  $D$ .

On lie les constantes d'intervalles de temps à la situation par les trois faits suivants et on donne aussi factuellement les deux premières contraintes temporelles de l'exercice précédent :

- $F_1 : OCCURS(nEnv(c, j), t_E)$

- $F_2 : OCCURS(nAb(c, j), t_A)$
- $F_3 : HOLDS(atHome(j), t_H)$
- $F_4 : t_E\{d\}t_H$
- $F_5 : t_H\{e^t\}t_A$

La société de livraison est censée garantir la règle  $R$  exprimée par la formule suivante

$$R : \forall C.\forall D.\forall T.\forall T'.((OCCURS(nEnv(C, D), T) \wedge OCCURS(nAb(C, D), T')) \rightarrow \exists T''.((T\{<\}T'') \wedge (T''\{<\}T') \wedge \neg HOLDS(atHome(D), T''))$$

1. Expliquer (en langage naturel) le sens de la règle  $R$ .
2. Il s'agit ici de transformer (R) pour faciliter le raisonnement :
  - (a) Instancier la règle (R) pour la substitution  $\sigma = \{C \leftarrow c, D \leftarrow j, T \leftarrow t_E, T' \leftarrow t_A\}$
  - (b) Skolemiser la formule obtenue (en utilisant comme constante de skolem pour  $T''$  la constante  $t_L$  - non encore utilisée dans cet exercice)
  - (c) Mettre sous forme clausale la règle obtenue (qui ne comporte plus aucune variable). On doit obtenir trois clauses que l'on nommera  $F_6, F_7$  et  $F_8$ .

Note : On peut considérer que l'on a prouvé  $R \vdash F_6, F_7, F_8$ .

3. On considère de plus les formules
  - $F_9 : \neg HOLDS(atHome(j), t_L)$
  - $F_{10} : t_E\{<\}t_L$
  - $F_{11} : t_L\{<\}t_A$

Montrer par résolution que  $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_9$ .

On admet que l'on peut prouver de façon similaire (preuve non demandée)  $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_{10}$  et  $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_{11}$ .

L'exercice précédent a permis de prouver que lorsqu'on avait les contraintes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ , on obtenait la contrainte  $C_5$ . Comme ces contraintes correspondent à  $F_4, F_5, F_{10}, F_{11}$ , en posant  $F_{12} : t_L\{d\}t_H$ , on considère donc avoir établi :  $F_4, F_5, F_{10}, F_{11} \vdash F_{12}$ .

On donne maintenant une forme clausale simplifiée de l'axiome d'incidence temporel (H1) de la logique réifiée de Allen :

$$Ax_1 : \neg HOLDS(F, T) \vee \neg IN(T', T) \vee HOLDS(F, T')$$

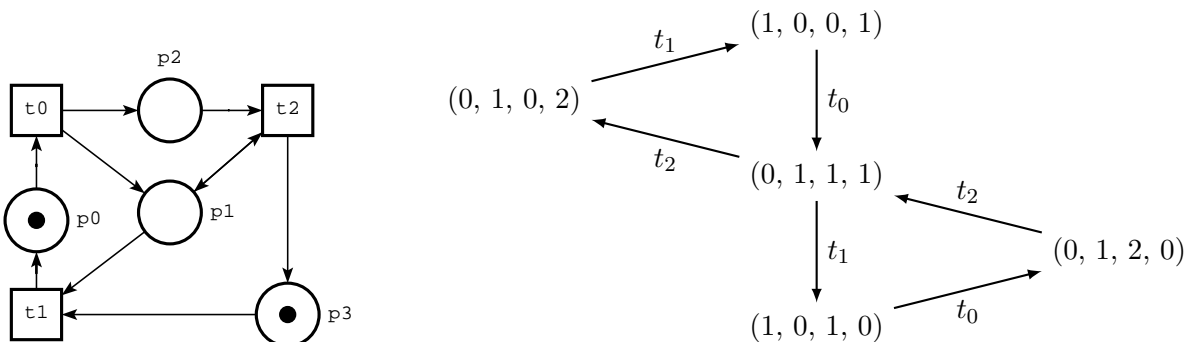
$$\text{avec : } Ax_2 : \neg(T_1\{d\}T_2) \vee IN(T_1, T_2)$$

4. Montrer par résolution que  $F_3, F_{12}, Ax_1, Ax_2 \vdash HOLDS(atHome(j), t_L)$ .
5. Indiquer comment les questions précédentes permettent de prouver que la règle (R) n'est pas respectée dans la situation décrite (représentée par  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , sachant que  $Ax_1, Ax_2$  sont toujours supposé vrais).

## Réseaux de Petri et logiques modales temporelles

### Exercice 3 Réseau de Petri - Analyse et vérification formelle (8 pts)

On considère le réseau de Petri suivant, dont le graphe des marquages accessibles est donné à droite



1. Ce réseau de Petri marqué est-il  $k$ -borné (si oui, pour quel  $k$ ) ? vivant ?
2. Donner une exécution de ce réseau de Petri marqué qui vérifie simultanément les deux formules de LTL suivantes :
  - (a)  $(\neg t_1)Ut_2$
  - (b)  $GF(t_2 \wedge Xt_2)$
3. Les formules de LTL suivantes sont-elles vérifiées par ce réseau de Petri marqué ? Pour celles qui ne le sont pas, indiquez si elles sont satisfiables ou non, en justifiant votre réponse :
  - (a)  $G(t_1 \rightarrow Xt_0)$
  - (b)  $t_2Ut_0$
  - (c)  $GF(t_2 \wedge Xt_2)$
  - (d)  $FG(t_2 \rightarrow Xt_2)$
4. Donner les formules de LTL qui correspondent aux expressions suivantes, caractérisant des exécutions (indépendamment du réseau de Petri considéré dans les questions précédentes).
  - (a) A un moment, il y aura deux  $t_0$  consécutifs.
  - (b) La seconde transition (i.e. la prochaine) ne sera pas  $t_0$ .
  - (c) Au bout d'un certain temps, il n'y a plus aucune occurrence de  $t_1$ .

## Logique épistémique

### Exercice 4 Annonces publiques (8 pts)

Un agent secret en mission est en difficulté. Dans l'urgence, trois agents de liaison ( $L_1, L_2, L_3$ ) se réunissent pour essayer de l'aider. Malheureusement, aucun ne sait de quel agent secret il s'agit. L'agent de liaison  $L_1$  connaît l'initiale de son nom, l'agent de liaison  $L_2$  connaît son âge, et enfin  $L_3$  sait si c'est un homme ou une femme.

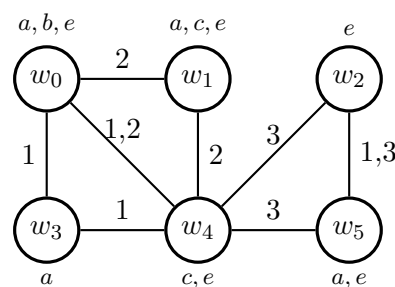
Les agents de liaison ont devant eux les cartes avec les identités possibles de l'agent secret. Ce sont les suivantes :

$$\{(a, 30, f), (a, 27, h), (a, 25, h), (b, 33, f), (b, 30, f), (c, 27, h), (c, 25, h), (d, 25, f)\}$$

1. Donner la structure de Kripke correspondant à cette situation, où les mondes possibles sont les identités possibles de l'agent secret.
2. Pour les deux séquences d'annonces publiques suivantes, indépendantes, indiquez après chaque annonce les modifications effectuées sur la structure de Kripke, et quelle est l'identité de l'agent secret.
  - (i)
    - ( $L_2$ ) Je sais que  $L_1$  ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
    - ( $L_1$ ) Moi aussi je sais que  $L_2$  ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
    - ( $L_3$ ) Eh bien moi je sais quelle est l'identité de l'agent !
  - (ii)
    - ( $L_3$ ) Je ne sais pas que  $L_1$  ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
    - ( $L_1$ ) Avant que tu parles je ne savais pas l'identité de l'agent, mais maintenant je la sais.

### Exercice 5 Vérification sur un modèle de Kripke (8 pts)

Dans le cadre de la logique S5, on considère la structure de Kripke suivante (la relation est supposée symétrique et réflexive, la relation est donc non dirigée, et les arcs de réflexivité non spécifiés).



Indiquez, en justifiant vos réponses, si les assertions suivantes sont vérifiées dans ce modèle :

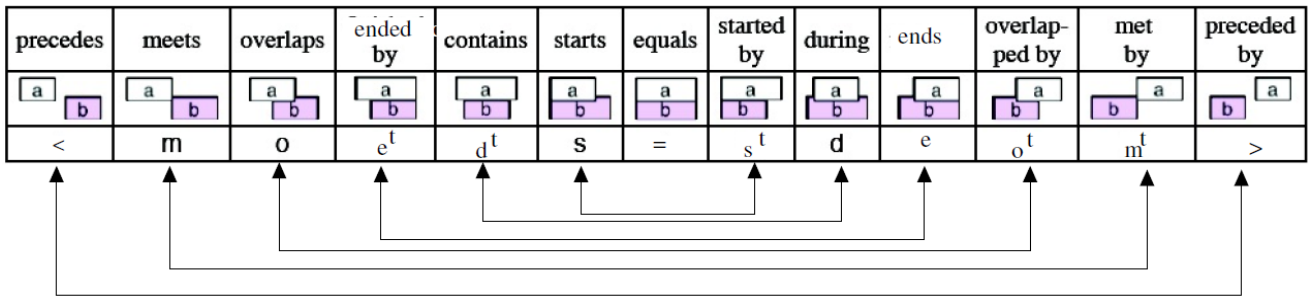
1.  $M, w_0 \models E_{\{1,2\}}^2(a \vee c)$
2.  $M, w_0 \models E_{\{1,2\}}^3(a \vee c)$
3.  $M, w_0 \models E_{\{1,3\}}^2(a \vee c)$
4.  $M \models D_{\{1,3\}}e \vee D_{\{1,3\}}\neg e$
5.  $M \models C_{\{1,2,3\}}(K_2c \rightarrow K_3e)$
6.  $M \models C_{\{1,2\}}(K_1a \rightarrow \neg K_2e)$

# Annexes

## Intervalles d'Allen

### Relations d'Allen

Classées par le "degré" avec lequel  $a$  commence avant  $b$  puis par le "degré" avec lequel  $a$  finit après  $b$ .  
Les flèches indiquent les relations transposées :  $a R b \iff b R^t a$



### Composition des relations

	<	m	o	e <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	s	=	s <sup>t</sup>	d	e	o <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>
<	<	<	<	<	<	<	<	<	< mosd	< mosd	< mosd	< mosd	tout
m	<	<	<	<	<	m	m	m	osd	osd	osd	e <sup>t</sup> = e	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >
o	<	<	< mo	< mo	< moe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	o	o	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	osd	osd	Concur	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >
e <sup>t</sup>	<	m	o	e <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	o	e <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	osd	e <sup>t</sup> = e	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >
d <sup>t</sup>	< m oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	Concur	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >
s	<	<	< mo	< mo	< moe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	s	s	s = s <sup>t</sup>	d	d	deo <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>
=	<	m	o	e <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	s	=	s <sup>t</sup>	d	e	o <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>
s <sup>t</sup>	< mo e <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	d <sup>t</sup>	s = s <sup>t</sup>	s <sup>t</sup>	s <sup>t</sup>	deo <sup>t</sup>	o <sup>t</sup>	o <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>
d	<	<	< mosd	< mosd	tout	d	d	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	d	d	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>
e	<	m	osd	e = e <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	d	e	o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	d	e	o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>
o <sup>t</sup>	< mo e <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	oe <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	Concur	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup>	d <sup>t</sup> s <sup>t</sup> o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	deo <sup>t</sup>	o <sup>t</sup>	o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	deo <sup>t</sup>	o <sup>t</sup>	o <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>
m <sup>t</sup>	< mo e <sup>t</sup> d <sup>t</sup>	s = s <sup>t</sup>	deo <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>	deo <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>	deo <sup>t</sup>	m <sup>t</sup>	>	>	>
>	tout	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>	deo <sup>t</sup> m <sup>t</sup> >	>	>	>	>

où Concur= $oe^t d^t s = s^t deo^t$  et tout= $\langle moe^t d^t s = s^t deo^t m^t \rangle$

### Algorithme de propagation des contraintes

Propager( $R_{ab}$ )

Empiler  $R_{ab}$

Tant que la pile est non vide

Dépiler  $R_{ij}$

Pour tout  $k$  dans  $[1, n]$ ,  $k \neq i$  et  $k \neq j$

$newR_{ik} \leftarrow$  conjonction( $R_{ik}$ , composition( $R_{ij}$ ,  $R_{jk}$ ))

$newR_{kj} \leftarrow$  conjonction( $R_{kj}$ , composition( $R_{ki}$ ,  $R_{ij}$ ))

Si  $newR_{ik} = \emptyset$  ou  $newR_{kj} = \emptyset$

contradiction temporelle : arrêt

Si  $newR_{ik} \neq R_{ik}$

$R_{ik} \leftarrow newR_{ik}$

Empiler  $R_{ik}$

Si  $newR_{kj} \neq R_{kj}$

$R_{kj} \leftarrow newR_{kj}$

Empiler  $R_{kj}$

## Logique Temporelle Linéaire (LTL)

### Notations

Soit  $\mathcal{M} = \langle W, R, I \rangle$  un modèle de Kripke respectant la sérialité (tout monde a au moins un successeur).

Étant donné  $w \in W$ , on note  $\Pi_w$  l'ensemble des chemins commençant par  $w$  ( $\Pi_w = \{w_0, w_1, \dots \mid w_0 = w, \forall i \in \mathbb{N}, w_i \in W \text{ et } (w_i, w_{i+1}) \in R\}$ ).

Étant donné un chemin  $\pi = w_0, w_1, \dots$ , on pose  $\pi(i) = w_i$  (monde à l'étape  $i$ ) et  $\pi^i = w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots$  (chemin décalé de  $i$ ).

### Syntaxe

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid X\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \varphi U \psi$$

### Sémantique (de chemin)

Soit  $\Pi$  un ensemble de chemins basé sur ce modèle ( $\Pi \subseteq \bigcup_{w \in W} \Pi_w$ ).

Pour tout chemin de  $\pi \in \Pi$ , la sémantique de  $\mathcal{M}, \pi \models \varphi$  (qui se lit  $\pi$  vérifie  $\varphi$  dans  $\mathcal{M}$ ) est définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}, \pi \models p & \text{ssi } \pi(0) \in I(p) \\ \mathcal{M}, \pi \models \neg\varphi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \not\models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi \wedge \psi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ et } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi \vee \psi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\ \mathcal{M}, \pi \models X\varphi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi^1 \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models F\varphi & \text{ssi } \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models G\varphi & \text{ssi } \forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi U \psi & \text{ssi } \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \psi \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, i-1\}, \mathcal{M}, \pi^k \models \varphi \end{array}$$

On dit que  $\varphi$  est *valide* pour  $(\mathcal{M}, \Pi)$  (noté  $(\mathcal{M}, \Pi) \models \varphi$ ) ssi  $\varphi$  est vérifié dans  $\mathcal{M}$  par tout chemin de  $\Pi$  (i.e.  $\forall \pi \in \Pi, \mathcal{M}, \pi \models \varphi$ ).

On dit que  $\varphi$  est *satisfiable* pour  $(\mathcal{M}, \Pi)$  ssi il existe au moins un chemin de  $\Pi$  qui vérifie  $\varphi$  dans  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire ssi  $\neg\varphi$  n'est pas valide pour  $(\mathcal{M}, \Pi)$ .

### Réseaux de Petri et LTL

Un réseau de Petri marqué vérifie une formule LTL si et seulement si toute trace d'exécution du réseau vérifie la formule. La formule est alors dite **valide** pour le réseau marqué.

Une formule LTL est **satisfiable** pour un réseau de Petri marqué s'il existe une trace d'exécution du réseau qui vérifie la formule.