

Le barème, sur 40, est donné à titre indicatif.

Intervalles de Allen

On considère la situation suivante :

Alors qu'il est chez lui, Jean reçoit une notification d'envoi d'un colis. Il reste alors chez lui jusqu'à finalement recevoir une notification de non-livraison pour cause d'absence. Peut-on en déduire que le livreur n'a pas vérifié qu'il était présent lors de sa tournée ?

Exercice 1 – Graphe temporel (6 pts)

On considère trois intervalles de Allen t_E , t_H et t_A correspondant respectivement à la notification d'envoi de colis, une période où Jean est chez lui et la notification d'abandon de livraison.

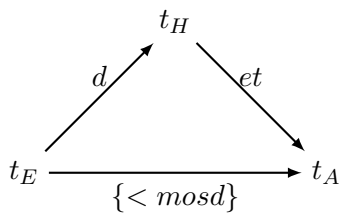
On donne les relations suivantes entre ces intervalles

- $C_1 : t_E\{d\}t_H$. La notification d'envoi s'est déroulée entièrement pendant la période où Jean était à domicile.
- $C_2 : t_H\{e^t\}t_A$. La période considérée où Jean est chez lui se termine par la réception de la notification d'abandon de livraison.

1. Construire le graphe temporel complet entre t_E , t_H et t_A .

Correction : 1 pt

$R_{EA} = R_{EH} \circ R_{HA} = \{d\} \circ \{e^t\} = \{< mosd\}$ d'après lecture du tableau



On considère maintenant un intervalle de Allen supplémentaire t_L correspondant au passage du livreur tel que

- $C_3 : t_E\{<\}t_L$.
- $C_4 : t_L\{<\}t_A$.

La propagation de C_3 est donnée (il n'est pas demandé de la refaire) : elle a pour seul effet de mettre à jour la contrainte entre t_H et t_L en $t_H\{<, m, o, e^t, d^t\}t_L$.

2. Propager la contrainte C_4 entièrement en détaillant toutes les étapes pour les arcs étiquetés par plusieurs relations (le graphe n'est pas contradictoire aussi les arcs comportant une seule relation ne sont pas modifiés lors de ces mises à jour).

Cette propagation doit notamment aboutir à dériver la contrainte $t_L\{d\}t_H$ que l'on nomme C_5 .

Correction : 4 pt

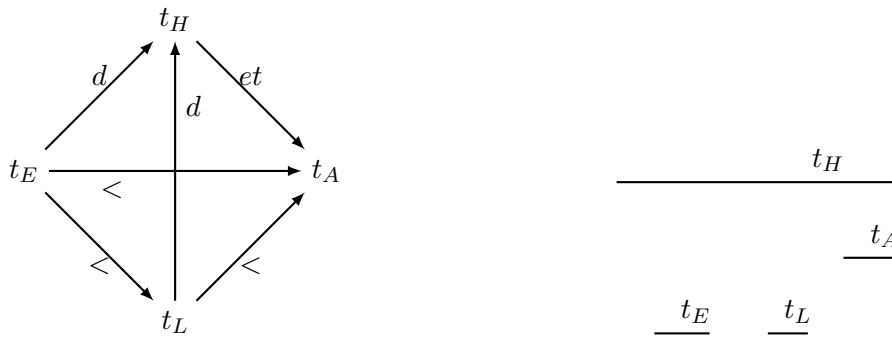
On traite R_{LA} , les autres nœuds à considérer sont E et H , qui conduisent aux quatre relations R_{LE} , R_{EA} , R_{LH} , R_{HA}

- R_{LE} est déjà unitaire (étiquetée par un seul arc)
- $nR_{EA} = R_{EA} \cap (R_{EL} \circ R_{LA}) = \{< mosd\} \cap (\{<\} \circ \{<\}) = \{<\}$, on empile
- $nR_{LH} = R_{LH} \cap (R_{LA} \circ R_{AH}) = \{> m^t o^t ed\} \cap (\{<\} \circ \{e\}) = \{> m^t o^t ed\} \cap \{< mosd\} = \{d\}$, on empile
- R_{HA} est déjà unitaire

toutes les étiquettes sont unitaires, on peut arrêter la propagation

- Donner le graphe temporel final complet et proposer une représentation graphique sur un axe temporel de ces 4 intervalles.

Correction : 1 pt



Exercice 2 – Logique réifiée de Allen (10 pts)

On formalise la situation de non-livraison de l'exercice précédent en logique réifiée de Allen avec les éléments suivants :

- Les constantes sont j représentant Jean, c qui représente le colis ainsi que les constantes d'intervalles de temps t_E , t_H et t_A de l'exercice précédent (et d'autres qui seront obtenues par skolemisation).
- Les fluents sont de la forme $atHome(P)$ où P est une personne
- Les événements possibles sont :
 - $nEnv(C, D)$: notification d'envoi du colis C au destinataire D
 - $nAb(C, D)$: notification d'abandon de livraison du colis C pour cause d'absence de son destinataire D .

On lie les constantes d'intervalles de temps à la situation par les trois faits suivants et on donne aussi factuellement les deux premières contraintes temporelles de l'exercice précédent :

- $F_1 : OCCURS(nEnv(c, j), t_E)$
- $F_2 : OCCURS(nAb(c, j), t_A)$
- $F_3 : HOLDS(atHome(j), t_H)$
- $F_4 : t_E \{d\} t_H$
- $F_5 : t_H \{e^t\} t_A$

La société de livraison est censée garantir la règle R exprimée par la formule suivante

$$R : \forall C. \forall D. \forall T. \forall T'. ((OCCURS(nEnv(C, D), T) \wedge OCCURS(nAb(C, D), T')) \rightarrow \exists T''. ((T \{<\} T'') \wedge (T'' \{<\} T') \wedge \neg HOLDS(atHome(D), T''))$$

- Expliquer (en langage naturel) le sens de la règle R .

Correction :

Si le destinataire D reçoit pendant l'intervalle T la notification qu'un colis va lui être livré et que pendant l'intervalle T' que la livraison est abandonnée alors il existe un intervalle T'' strictement compris entre T et T' pendant lequel D n'est pas chez lui.

- Il s'agit ici de transformer (R) pour faciliter le raisonnement :

- Instancier la règle (R) pour la substitution $\sigma = \{C \leftarrow c, D \leftarrow j, T \leftarrow t_E, T' \leftarrow t_A\}$
- Skolemiser la formule obtenue (en utilisant comme constante de skolem pour T'' la constante t_L - non encore utilisée dans cet exercice)
- Mettre sous forme clausale la règle obtenue (qui ne comporte plus aucune variable). On doit obtenir trois clauses que l'on nommera F_6 , F_7 et F_8 .

Correction : Instantiation : $\sigma R : ((OCCURS(nEnv(c, j), t_E) \wedge OCCURS(nAb(c, j), t_A)) \rightarrow \exists T'' . ((t_E \{<\} T'') \wedge (T'' \{<\} t_A) \wedge \neg HOLDS(atHome(j), T''))$

Skolem. : $((OCCURS(nEnv(c, j), t_E) \wedge OCCURS(nAb(c, j), t_A)) \rightarrow (t_E \{<\} t_L) \wedge (t_L \{<\} t_A) \wedge \neg HOLDS(atHome(j), t_L))$

Clauses :

$F_6 : \neg OCCURS(nEnv(c, j), t_E) \vee \neg OCCURS(nAb(c, j), t_A) \vee t_E \{<\} t_L$

$F_7 : \neg OCCURS(nEnv(c, j), t_E) \vee \neg OCCURS(nAb(c, j), t_A) \vee t_L \{<\} t_A$

$F_8 : \neg OCCURS(nEnv(c, j), t_E) \vee \neg OCCURS(nAb(c, j), t_A) \vee \neg HOLDS(atHome(j), t_L)$

Note : On peut considérer que l'on a prouvé $R \vdash F_6, F_7, F_8$.

3. On considère de plus les formules

- $F_9 : \neg HOLDS(atHome(j), t_L)$
- $F_{10} : t_E \{<\} t_L$
- $F_{11} : t_L \{<\} t_A$

Montrer par résolution que $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_9$.

Correction : On dérive les formules suivantes :

$R_1 : \neg OCCURS(nAb(c, j), t_A) \vee \neg HOLDS(atHome(j), t_L)$ (par résolution de F_1 et F_8)

$R_2 : \neg HOLDS(atHome(j), t_L)$ (par résolution de F_2 et R_1)

On a donc prouvé : $F_1, F_2, F_8 \vdash R_2 = F_9$. A fortiori $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_9$.

On peut aussi procéder par réfutation en supposant $\neg F_9$, soit $HOLDS(atHome(j), t_L)$, auquel cas on résout encore R_2 avec $\neg F_9$ pour obtenir la clause vide et on conclut qu'on a prouvé $F_1, F_2, F_8, \neg F_9 \vdash \square$, d'où (a fortiori) $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_9$.

On admet que l'on peut prouver de façon similaire (preuve non demandée) $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_{10}$ et $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_{11}$.

L'exercice précédent a permis de prouver que lorsqu'on avait les contraintes C_1, C_2, C_3 et C_4 , on obtenait la contrainte C_5 . Comme ces contraintes correspondent à F_4, F_5, F_{10}, F_{11} , en posant $F_{12} : t_L \{d\} t_H$, on considère donc avoir établi : $F_4, F_5, F_{10}, F_{11} \vdash F_{12}$.

On donne maintenant une forme clausale simplifiée de l'axiome d'incidence temporel (H1) de la logique réifiée de Allen :

$$Ax_1 : \neg HOLDS(F, T) \vee \neg IN(T', T) \vee HOLDS(F, T')$$

$$\text{avec : } Ax_2 : \neg (T_1 \{d\} T_2) \vee IN(T_1, T_2)$$

4. Montrer par résolution que $F_3, F_{12}, Ax_1, Ax_2 \vdash HOLDS(atHome(j), t_L)$.

Correction : On dérive les formules suivantes :

$R_3 : \neg IN(T', t_H) \vee HOLDS(atHome(j), T')$ (par résolution de Ax_1 et F_3 avec $\sigma : \{T \leftarrow t_H, F \leftarrow atHome(j)\}$)

$R_3 : IN(t_L, t_H)$ (par résolution de Ax_2 et F_{12} avec $\sigma : \{T_1 \leftarrow t_L, T_2 \leftarrow t_H\}$)

$R_4 : HOLDS(atHome(j), t_L)$ (par résolution de R_3 et R_4)

On a donc prouvé : $F_3, F_{12}, Ax_1, Ax_2 \vdash R_4 = HOLDS(atHome(j), t_L)$. CQFD.

5. Indiquer comment les questions précédentes permettent de prouver que la règle (R) n'est pas respectée dans la situation décrite (représentée par F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , sachant que Ax_1, Ax_2 sont toujours supposé vrais).

Correction : On note $\Sigma = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, Ax_1, Ax_2\}$. C'est notre base de fait considérés comme vrai.

Par réfutation, on suppose aussi (R).

D'après 2, (P1) : $R \vdash F_6, F_7, F_8$, donc (P2) $\Sigma, R \vdash F_6, F_7, F_8$.

D'après 3, (P3) $F_1, F_2, F_6, F_7, F_8 \vdash F_9, F_{10}, F_{11}$. Comme F_1 et F_2 sont dans Σ , et vu l'énoncé précédent, on a (P4) $\Sigma, R \vdash F_1, F_2, F_6, F_7, F_8$, et donc aussi (P5) $\Sigma, R \vdash F_9, F_{10}, F_{11}$.

D'après l'exo (en utilisant comme constante de skolem pour T'' la constante t_L - non encore utilisée dans cet exercice) précédent, (P6) $F_4, F_5, F_{10}, F_{11} \vdash F_{12}$. Comme Σ contient F_4 et F_5 et vu (P5), on a bien (P7) $\Sigma, R \vdash F_4, F_5, F_{10}, F_{11}$ et donc (P8) $\Sigma, R \vdash F_{12}$.

D'après 4, (P9) $F_3, F_{12}, Ax_1, Ax_2 \vdash HOLDS(atHome(j), t_L)$ Donc vu (P9) : a fortiori : (P10) $\Sigma, R \vdash$

$HOLDS(atHome(j), t_L) = \neg F_9$.

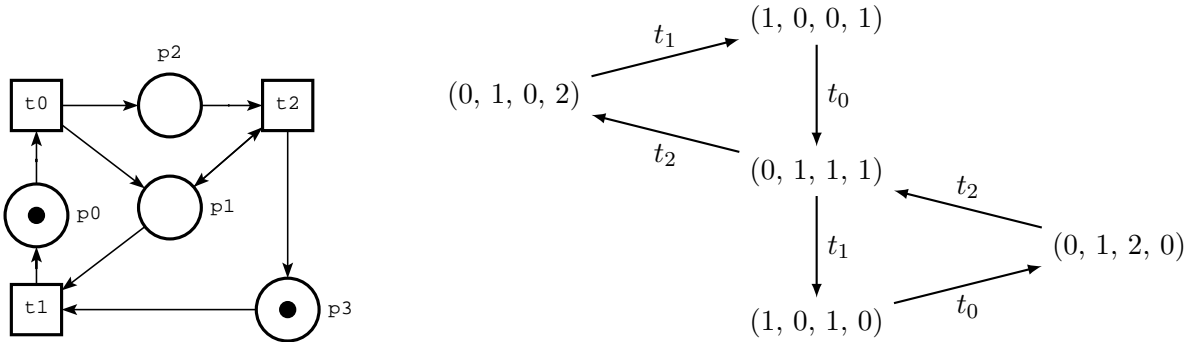
Ainsi Σ, R permet à la fois de prouver F_9 (P5) et $\neg F_9$ (P10). On a une contradiction, c'est à dire que $\Sigma, R \vdash \perp$.

On peut en déduire que $\Sigma \vdash \neg R$, ie, que la règle R n'est pas vérifiée quand Σ l'est (ie quand on est dans la situation décrite).

Réseaux de Petri et logiques modales temporelles

Exercice 3 Réseau de Petri - Analyse et vérification formelle (8 pts)

On considère le réseau de Petri suivant, dont le graphe des marquages accessibles est donné à droite



1. Ce réseau de Petri marqué est-il k -borné (si oui, pour quel k) ? vivant ?

Correction : 1 pt
2 borné et vivant

2. Donner une exécution de ce réseau de Petri marqué qui vérifie simultanément les deux formules de LTL suivantes :

- (a) $(\neg t_1)U t_2$
- (b) $GF(t_2 \wedge X t_2)$

Correction : 1.5 pts

$t_0 t_2 t_1 (t_0 t_1 t_0 t_2 t_2 t_1)^*$ soit un tour par le cycle de gauche (pour vérifier la formule (a) : pas de t_1 avant le premier t_2) puis une alternance cycle de droite, cycle de gauche (pour vérifier la formule (b) : à tout instant, il y a un instant ultérieur où on a deux t_2 de suite, en passant par le cycle de droite puis le cycle de gauche)

3. Les formules de LTL suivantes sont-elles vérifiées par ce réseau de Petri marqué ? Pour celles qui ne le sont pas, indiquez si elles sont satisfiables ou non, en justifiant votre réponse :

- (a) $G(t_1 \rightarrow X t_0)$
- (b) $t_2 U t_0$
- (c) $GF(t_2 \wedge X t_2)$
- (d) $FG(t_2 \rightarrow X t_2)$

Correction : 4 pts

- (a) $G(t_1 \rightarrow X t_0)$: valide (à tout instant, si on a t_1 , elle est suivie de t_0)
- (b) $t_2 U t_0$: valide car t_0 dès le premier instant, dans toute exécution
- (c) $GF(t_2 \wedge X t_2)$: satisfiable non valide. Exemple toute exécution qui alterne cycle de droite, cycle de gauche ; contre-exemple : exécution qui boucle dans le cycle de gauche $(t_0 t_2 t_1)^*$
- (d) $FG(t_2 \rightarrow X t_2)$: non valide, non satisfiable : la formule signifie qu'à partir d'un moment, si on a t_2 , on n'a plus que des t_2 (à l'instant d'après, puis récursivement). Or on a forcément un t_2 à un moment, mais pas une succession infinie de t_2

4. Donner les formules de LTL qui correspondent aux expressions suivantes, caractérisant des exécutions (indépendamment du réseau de Petri considéré dans les questions précédentes).

- (a) A un moment, il y aura deux t_0 consécutifs.
- (b) La seconde transition (i.e. la prochaine) ne sera pas t_0 .
- (c) Au bout d'un certain temps, il n'y a plus aucune occurrence de t_1 .

Correction : 1.5 pt

- (a) $F(t_0 \wedge Xt_0)$
- (b) $X\neg t_0$
- (c) $FG\neg t_1$

Logique épistémique

Exercice 4 Annonces publiques (8 pts)

Un agent secret en mission est en difficulté. Dans l'urgence, trois agents de liaison (L_1, L_2, L_3) se réunissent pour essayer de l'aider. Malheureusement, aucun ne sait de quel agent secret il s'agit. L'agent de liaison L_1 connaît l'initiale de son nom, l'agent de liaison L_2 connaît son âge, et enfin L_3 sait si c'est un homme ou une femme.

Les agents de liaison ont devant eux les cartes avec les identités possibles de l'agent secret. Ce sont les suivantes :

$$\{(a, 30, f), (a, 27, h), (a, 25, h), (b, 33, f), (b, 30, f), (c, 27, h), (c, 25, h), (d, 25, f)\}$$

1. Donner la structure de Kripke correspondant à cette situation, où les mondes possibles sont les identités possibles de l'agent secret.
2. Pour les deux séquences d'annonces publiques suivantes, indépendantes, indiquez après chaque annonce les modifications effectuées sur la structure de Kripke, et quelle est l'identité de l'agent secret.

(i)

- (L_2) Je sais que L_1 ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
- (L_1) Moi aussi je sais que L_2 ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
- (L_3) Eh bien moi je sais quelle est l'identité de l'agent !

(ii)

- (L_3) Je ne sais pas que L_1 ne sait pas quelle est l'identité de l'agent.
- (L_1) Avant que tu parles je ne savais pas l'identité de l'agent, mais maintenant je la sais.

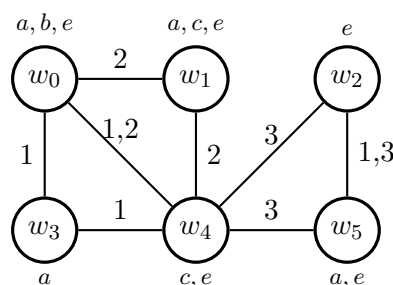
Correction : 3 points par séquence

séquence 1 (L_2) : élimine a25h, c25h, d25f, (L_1) élimine (b33f) et (b30f), et (L_3) élimine (a27h), (a25h), (c27h) et (c25h) : L'agent est donc (a30f)

séquence 2 (L_3) élimine (a27h), (a25h), (c27h) et (c25h), (L_1) : "avant que" élimine (d25f), et "maintenant" élimine (b33f) et (b30f) : l'agent est ici encore (a30f)

Exercice 5 Vérification sur un modèle de Kripke (8 pts)

Dans le cadre de la logique S5, on considère la structure de Kripke suivante (la relation est supposée symétrique et réflexive, la relation est donc non dirigée, et les arcs de réflexivité non spécifiés).



Indiquez, en justifiant vos réponses, si les assertions suivantes sont vérifiées dans ce modèle :

1. $M, w_0 \models E_{\{1,2\}}^2(a \vee c)$
2. $M, w_0 \models E_{\{1,2\}}^3(a \vee c)$
3. $M, w_0 \models E_{\{1,3\}}^2(a \vee c)$
4. $M \models D_{\{1,3\}}e \vee D_{\{1,3\}}\neg e$
5. $M \models C_{\{1,2,3\}}(K_2c \rightarrow K_3e)$
6. $M \models C_{\{1,2\}}(K_1a \rightarrow \neg K_2e)$

Correction : 1 point par réponse + 2 pts pour les justifications

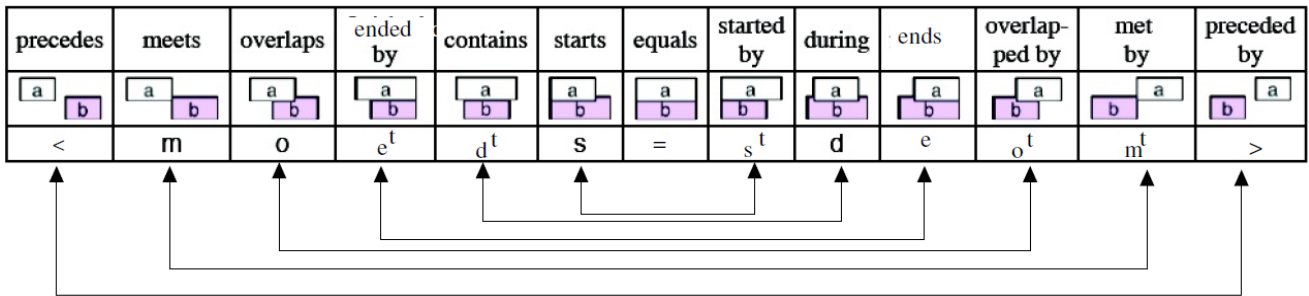
1. oui
2. oui
3. non (faux en w_2)
4. oui
5. oui
6. non (faux en w_1)

Annexes

Intervalles d'Allen

Relations d'Allen

Classées par le "degré" avec lequel a commence avant b puis par le "degré" avec lequel a finit après b .
Les flèches indiquent les relations transposées : $a R b \iff b R^t a$



Composition des relations

	<	m	o	e ^t	d ^t	s	=	s ^t	d	e	o ^t	m ^t	>
<	<	<	<	<	<	<	<	<	< mosd	< mosd	< mosd	< mosd	tout
m	<	<	<	<	<	m	m	m	osd	osd	osd	e ^t = e	d ^t s ^t o ^t m ^t >
o	<	<	< mo	< mo	< moe ^t d ^t	o	o	oe ^t d ^t	osd	osd	Concur	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t m ^t >
e ^t	<	m	o	e ^t	d ^t	o	e ^t	d ^t	osd	e ^t = e	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t m ^t >
d ^t	< m oe ^t d ^t	oe ^t d ^t	oe ^t d ^t	d ^t	d ^t	oe ^t d ^t	d ^t	d ^t	Concur	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t m ^t >
s	<	<	< mo	< mo	< moe ^t d ^t	s	s	s = s ^t	d	d	deo ^t	m ^t	>
=	<	m	o	e ^t	d ^t	s	=	s ^t	d	e	o ^t	m ^t	>
s ^t	< mo e ^t d ^t	oe ^t d ^t	oe ^t d ^t	d ^t	d ^t	s = s ^t	s ^t	s ^t	deo ^t	o ^t	o ^t	m ^t	>
d	<	<	< mosd	< mosd	tout	d	d	deo ^t m ^t >	d	d	deo ^t m ^t >	>	>
e	<	m	osd	e = e ^t	d ^t s ^t o ^t m ^t >	d	e	o ^t m ^t >	d	e	o ^t m ^t >	>	>
o ^t	< mo e ^t d ^t	oe ^t d ^t	Concur	d ^t s ^t o ^t	d ^t s ^t o ^t m ^t >	deo ^t	o ^t	o ^t m ^t >	deo ^t	o ^t	o ^t m ^t >	>	>
m ^t	< mo e ^t d ^t	s = s ^t	deo ^t	m ^t	>	deo ^t	m ^t	>	deo ^t	m ^t	>	>	>
>	tout	deo ^t m ^t >	deo ^t m ^t >	>	>	deo ^t m ^t >	>	>	deo ^t m ^t >	>	>	>	>

où Concur = $oe^t d^t s = s^t deo^t$ et tout = $\langle moe^t d^t s = s^t deo^t m^t \rangle$

Algorithme de propagation des contraintes

Propager(R_{ab})

Empiler R_{ab}

Tant que la pile est non vide

Dépiler R_{ij}

Pour tout k dans $[1, n]$, $k \neq i$ et $k \neq j$

$newR_{ik} \leftarrow$ conjonction(R_{ik} , composition(R_{ij} , R_{jk}))

$newR_{kj} \leftarrow$ conjonction(R_{kj} , composition(R_{ki} , R_{ij}))

Si $newR_{ik} = \emptyset$ ou $newR_{kj} = \emptyset$

contradiction temporelle : arrêt

Si $newR_{ik} \neq R_{ik}$

$R_{ik} \leftarrow newR_{ik}$

Empiler R_{ik}

Si $newR_{kj} \neq R_{kj}$

$R_{kj} \leftarrow newR_{kj}$

Empiler R_{kj}

Logique Temporelle Linéaire (LTL)

Notations

Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, I \rangle$ un modèle de Kripke respectant la sérialité (tout monde a au moins un successeur).

Étant donné $w \in W$, on note Π_w l'ensemble des chemins commençant par w ($\Pi_w = \{w_0, w_1, \dots \mid w_0 = w, \forall i \in \mathbb{N}, w_i \in W \text{ et } (w_i, w_{i+1}) \in R\}$).

Étant donné un chemin $\pi = w_0, w_1, \dots$, on pose $\pi(i) = w_i$ (monde à l'étape i) et $\pi^i = w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots$ (chemin décalé de i).

Syntaxe

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid X\varphi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid \varphi U \psi$$

Sémantique (de chemin)

Soit Π un ensemble de chemins basé sur ce modèle ($\Pi \subseteq \bigcup_{w \in W} \Pi_w$).

Pour tout chemin de $\pi \in \Pi$, la sémantique de $\mathcal{M}, \pi \models \varphi$ (qui se lit π vérifie φ dans \mathcal{M}) est définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}, \pi \models p & \text{ssi } \pi(0) \in I(p) \\ \mathcal{M}, \pi \models \neg\varphi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \not\models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi \wedge \psi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ et } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi \vee \psi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\ \mathcal{M}, \pi \models X\varphi & \text{ssi } \mathcal{M}, \pi^1 \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models F\varphi & \text{ssi } \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models G\varphi & \text{ssi } \forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \\ \mathcal{M}, \pi \models \varphi U \psi & \text{ssi } \exists i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, \pi^i \models \psi \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, i-1\}, \mathcal{M}, \pi^k \models \varphi \end{array}$$

On dit que φ est *valide* pour (\mathcal{M}, Π) (noté $(\mathcal{M}, \Pi) \models \varphi$) ssi φ est vérifié dans \mathcal{M} par tout chemin de Π (i.e. $\forall \pi \in \Pi, \mathcal{M}, \pi \models \varphi$).

On dit que φ est *satisfiable* pour (\mathcal{M}, Π) ssi il existe au moins un chemin de Π qui vérifie φ dans \mathcal{M} , c'est-à-dire ssi $\neg\varphi$ n'est pas valide pour (\mathcal{M}, Π) .

Réseaux de Petri et LTL

Un réseau de Petri marqué vérifie une formule LTL si et seulement si toute trace d'exécution du réseau vérifie la formule. La formule est alors dite **valide** pour le réseau marqué.

Une formule LTL est **satisfiable** pour un réseau de Petri marqué s'il existe une trace d'exécution du réseau qui vérifie la formule.