UPMC Année 2015-2016	LRC - Examen réparti n° 2	M1 ANDROIDE M1 DAC

Eléments de correction
Durée 2h - documents et calculatrices non autorisés
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

1 Logique épistémique

Exercice 1 – Logique T – *2 points*

On se place dans cet exercice dans le cadre de la logique T. Il s'agit d'une logique *normale* (donc doté de la nécessitation, du Modus Ponens et de l'axiome K, voir Annexes pour le rappel des définitions), avec en plus l'axiome T. De façon équivalente, par correspondance, les relations d'accessibilité dans les modèles de Kripke de cette logique sont réflexives, *mais pas nécessairement symétriques et transitives.*

1. Montrez en raisonnant sur la sémantique des mondes de Kripke que dans la logique T la formule $A \to \Diamond A$ est valide
2. Montrez par contre que la même formule n'est pas valide en l'absence de l'axiome T (c'est-à-dire, si la relation d'accessibilité n'est pas nécessairement réflexive).

Correction :

1. Supposons $A \to \Diamond A$ non valide, alors il existe $M, w \not\models A \to \Diamond A$. Donc (i) $M, w \models A$ et (ii) $M, w \not\models \Diamond A$. Par (ii) on a que il n'existe pas w' tq $(w, w') \in R : M, w' \models p$. Or R est reflexive, et avec (i) on a une contradiction.
2. Il suffit d'exhiber un contre-exemple, par ex. tout simplement un monde unique où p est vrai.

Exercice 2 – L'anniversaire de Cheryl – *8 points*

On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5 (relations réflexives, symétriques et transitives). Cet exercice a été posé en 2015 lors d'un examen de mathématiques "Singapore and Asian Schools Math Olympiad". [1]

Cheryl ne souhaite pas révéler sa date d'anniversaire à ses deux nouveaux amis, Albert et Bernard. Par contre, elle leur donne 10 dates (jour/mois) possibles, qui sont indiquées dans la table suivante :

Mai		15	16			19
Juin				17	18	
Juillet	14		16			
Août	14	15		17		

Cheryl parle ensuite séparément à Albert, à qui elle révèle seulement le mois de son anniversaire, puis à Bernard à qui elle révèle seulement le jour de son anniversaire.

1. Donnez la structure de Kripke où les mondes possibles sont les dates d'anniversaires possibles, avec les relations d'accessibilité correspondant à Albert et à Bernard.
2. En utilisant les propositions *mai15*, *mai16*, etc. pour représenter les différentes dates d'anniversaire, indiquez à quelle formule correspond "l'agent i sait quelle est la date d'anniversaire de Cheryl", que l'on notera en raccourci K_i^{date}.

1. Voir par exemple `https://en.wikipedia.org/wiki/Cheryl's_Birthday`.

Correction : 1. Albert peut distinguer les dates avec les mois différents, Bernard peut distinguer les dates avec les jours différents.
2. K_i^{date} : $K_i mai15 \vee K_i mai16 \ldots$

Ensuite, Albert et Bernard font les déclarations publiques suivantes :

(i) Albert : je ne sais pas quelle est la date d'anniversaire de Cheryl, mais je sais que Bernard ne le sait pas non plus.

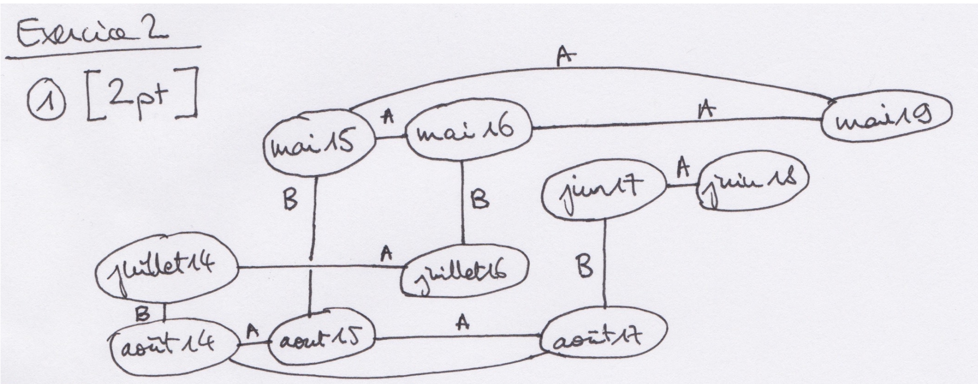
(ii) Bernard : Maintenant je sais quelle est la date d'anniversaire de Cheryl.

(iii) Albert : Alors je sais moi aussi quelle est la date d'anniversaire de Cheryl.

3. Représentez l'énoncé (i) sous forme logique.
4. Indiquez comment la structure de Kripke évolue après chaque annonce publique, en justifiant formellement chaque étape.
5. Quelle est la date d'anniversaire de Cheryl ? Justifiez votre réponse, soit en vous appuyant sur la question 4, soit en proposant un raisonnement le plus détaillé possible.
6. Certaines parties des annonces publiques (i), (ii) et (iii) sont-elles superflues ?

Correction :

3. $\neg K_A^{date} \wedge K_A \neg K_B^{date}$,
4. La structure de Kripke initiale est la suivante :



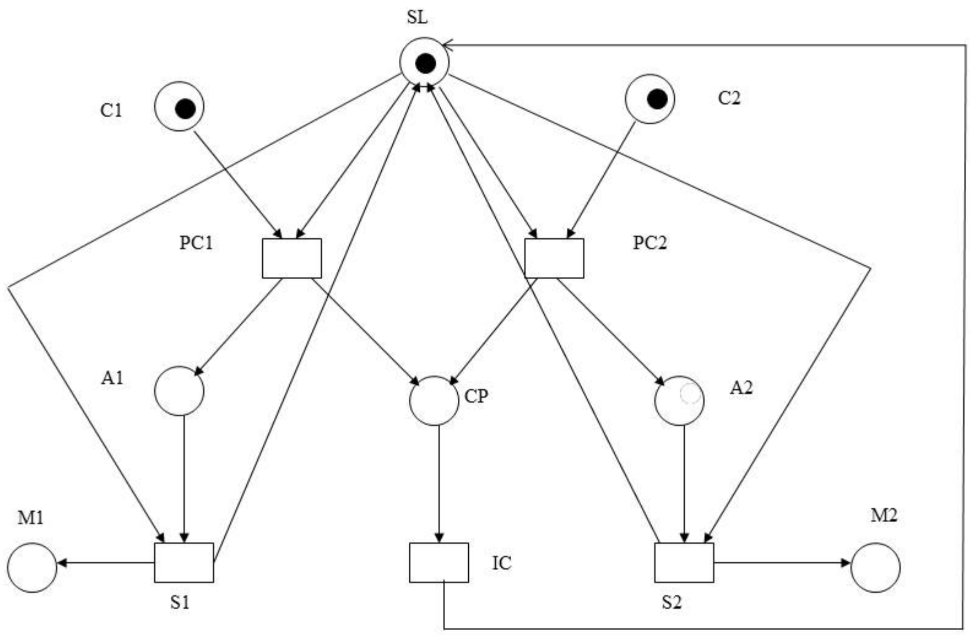
Ensuite, à chaque annonce, les mondes sont mis à jour. Par exemple après l'annonce (i), tous les mondes dans lesquels $K_A \neg K_B^{date}$ est faux sont éliminés, c'est-à-dire toutes les dates de Mai et Juin.

5. C'est le 16 Juillet.
6. Oui, la première partie de (i) n'apporte rien car il est connaissance commune que Albert ne connait pas la date, car chaque mois comprend au moins deux dates.

2 Réseaux de Petri et Automates Temporisés

Exercice 3 – Réseaux de Petri – *6 points : 3,2,1*

Dans cet exercice, nous nous intéressons à la modélisation du fonctionnement d'un restaurant selon le RdP donné ci-dessous :



Nous utilisons les notations suivantes pour ne pas surcharger le RdP : Client i : C_i ; Prendre Commande i : PC_i ; Manger i : M_i ; Commande Prise : CP ; Attente i : A_i ; Informer Cuisine : IC ; Servir i : S_i ; Serveur Libre : SL.

1. Donnez le graphe des marquages accessibles en précisant les transitions franchies sachant que :
   - l'ordre des places dans le marquage est le suivant : $M = (SL, C_1, C_2, A_1, CP, A_2, M_1, M_2)$
   - les places SL, C_1 et C_2 sont initialement marquées 1 (*i.e.* $M_0 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$)

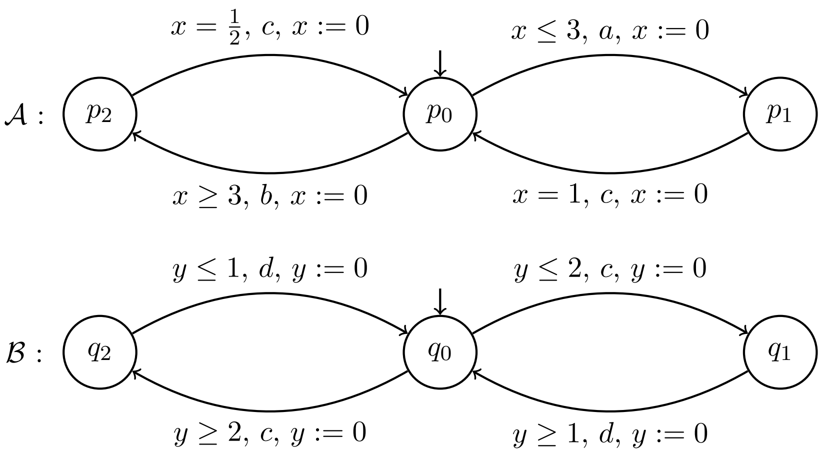
   Les temps d'attente des 2 clients sont-ils comparables ? Peut-il y avoir famine ;-) ? Expliquer comment cela peut arriver à travers un scénario possible d'exécution.
2. Modifiez le réseau de sorte à ce que les commandes des 2 clients soient prises avant qu'aucun des deux ne soit servi.
3. Donnez le marquage initial associé et le nouveau graphe des marquages accessibles.

Correction :

Voir le complément de correction posté pour cet exercice.

Exercice 4 – Composition d'automates temporisés, question de cours –*4 points : 2,2*

Composer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:



Correction :

Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se synchronisent sur c et exécutent les autres actions indépendamment de l'autre automate.

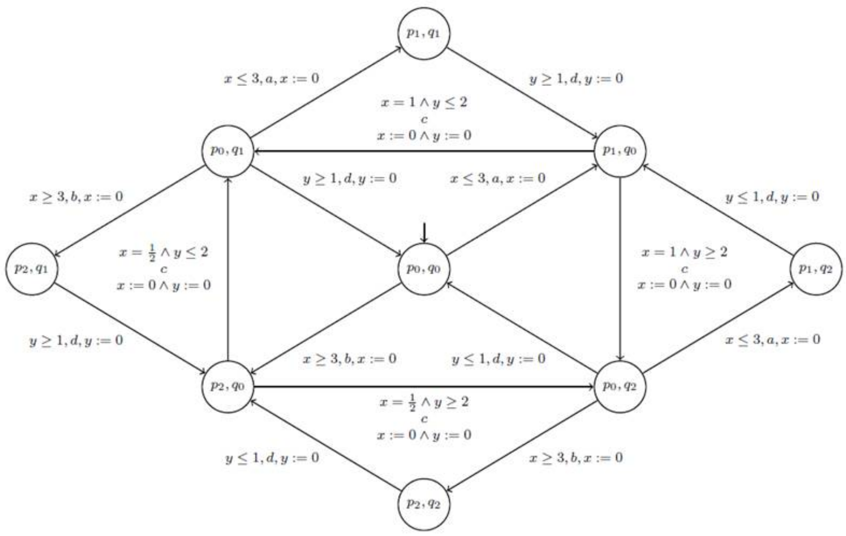


FIGURE 1 – Composition des automates A et B

Annexes

Système normal K

Si on ne fait aucune hypothèse particulière sur les propriétés des modèles de Kripke considérés, on est en présence d'un système normal de logique modale. On a alors :

- Nécessitation : si $M \models \phi$, alors $M \models \Box\phi$
- Modus Ponens : si $M \models \phi$ et $M \models \phi \rightarrow \varphi$, alors $M \models \varphi$
- Axiome K : $\Box(\phi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\varphi)$

Correspondance

L'axiome K ne demande aucune hypothèse particulière sur les cadres de modèles de Kripke considéré (d'où son nom). Mais on peut établir en général des équivalences entre les propriétés des cadres et certains schémas d'axiomes (qui ne sont pas valides dans un système normal) :

Nom	**Axiome**	**Propriété**	
T	$\Box\phi \rightarrow \phi$	réflexivité :	$\forall w : (w, w) \in R$
D	$\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$	sérialité :	$\forall w, \exists w' : (w, w') \in R$
4	$\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$	transitivité :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w', w'') \in R$, alors $(w, w'') \in R$
5	$\Diamond\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	euclidienne :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w, w'') \in R$, alors $(w', w'') \in R$
B	$\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$	symétrie :	$\forall w, w'$: si $(w, w') \in R$ alors $(w', w) \in R$

La logique modale S5 peut être caractérisée par K avec en plus $T, 4$ et B (relations réflexives, symétriques, et transitives).

Composition d'automates temporisés

Soient $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, q_1^i, \Sigma_1, X_1, \Delta_1, Inv_1 \rangle$ et $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, q_2^i, \Sigma_2, X_2, \Delta_2, Inv_2 \rangle$ deux automates temporisés avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

La synchronisation de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est l'automate temporisé $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2 = \langle Q, q^i, \Sigma, X, \Delta, Inv \rangle$ où

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q^i = (q_1^i, q_2^i)$
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $X = X_1 \cup X_2$
- supposons que $(q_1, g_1, a_1, r_1, q_1') \in \Delta_1$ et $(q_2, g_2, a_2, r_2, q_2') \in \Delta_2$
  - si $a_1 = a_2 = a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, on se synchronise : $((q_1, q_2), g_1 \wedge g_2, a, r_1 \cup r_2, (q_1', q_2')) \in \Delta$
  - si $a_1 \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$, seul $\mathcal{A}_1$ évolue : $((q_1, q_2), g_1, a_1, r_1, (q_1', q_2)) \in \Delta$
  - si $a_2 \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$, seul $\mathcal{A}_2$ évolue : $((q_1, q_2), g_2, a_2, r_2, (q_1, q_2')) \in \Delta$
- $\forall (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$, $Inv(q_1, q_2) = Inv_1(q_1) \wedge Inv_2(q_2)$