

## 1 Logique propositionnelle

**Exercice 1** – Méthode des tableaux sémantiques – 2 points

Démontrer la validité de  $F = ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ , c'est-à-dire  $\models F$ , avec la méthode des tableaux sémantiques. Vous indiquerez la formule ré-écrite à chaque étape.

**Exercice 2** – Système de Hilbert – 2 points

Soit  $G = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (R \rightarrow Q))$ . Montrer que  $\vdash G$  dans le système de Hilbert.

## 2 Logique des prédicats du premier ordre

**Exercice 3** – Unification – 2 points

Soit les couples de termes suivants :

1.  $t_1 = f(x, y, g(a, a))$  et  $t_2 = f(g(y, y), z, z)$
2.  $t'_1 = f(x, g(x, b), a)$  et  $t'_2 = f(g(y, y), g(y, b), y)$

où  $x, y, z$  sont des variables,  $f$  et  $g$  des fonctions, et  $a$  et  $b$  des constantes.

Pour chacun de ces couples, indiquez s'ils s'unifient. Lorsqu'il y a unification, donner l'unifieur le plus général, et dans le cas contraire, expliquer pourquoi l'unification échoue.

**Exercice 4** – Représentation en logique des prédicats du premier ordre – 3 points

On souhaite représenter différentes combinaisons du jeu de poker, dont on rappelle qu'il repose sur la distribution de cinq cartes.

On considère deux ensembles de constantes, l'ensemble des hauteurs et l'ensemble des couleurs, respectivement définis comme  $\mathcal{H} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \text{valet}, \text{dame}, \text{roi}, \text{as}\}$  et  $\mathcal{C} = \{\text{coeur}, \text{carreau}, \text{pique}, \text{trèfle}\}$ .

On considère la fonction *carte* définie sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{C}$  qui permet de construire par exemple les termes *carte(dame, coeur)* ou *carte(5, pique)*.

Une distribution  $D$  correspond à un ensemble de cartes et on considère le prédicat *dans(Carte, D)* qui est vrai si la distribution  $D$  contient la carte *Carte* et faux sinon.

Par exemple, soit  $d_1$  la constante qui correspond à la distribution contenant le roi de cœur, le roi de pique, le valet de carreau, le valet de trèfle et le deux de pique, c'est-à-dire à l'ensemble  $\{\text{carte}(\text{roi}, \text{coeur}), \text{carte}(\text{roi}, \text{pique}), \text{carte}(\text{valet}, \text{carreau}), \text{carte}(\text{valet}, \text{trèfle}), \text{carte}(2, \text{pique})\}$ . On a alors *dans(carte(roi, coeur),  $d_1$ )* est vrai, *dans(carte(2, carreau),  $d_1$ )* est faux.

On définit de plus le prédicat *eq(X, Y)* qui exprime que  $X$  est égal à  $Y$  et le prédicat *suivant( $H_1, H_2$ )* qui exprime que la hauteur  $H_2$  suit immédiatement la hauteur  $H_1$ , selon l'ordre indiqué ci-dessous dans l'énumération de  $\mathcal{H}$ . On a par exemple *suivant(10, valet)* est vrai, mais *suivant(as, roi)* est faux de même que *suivant(9, dame)*.

Les questions suivantes utilisent de plus les prédicats *paire(D, H)*, *brelan(D, H)*, *full(D,  $H_1, H_2$ )* et *msuite(D, H)* pour exprimer des propriétés des distributions et indiquer respectivement, que  $D$  contient une paire de hauteur  $H$ , un brelan de hauteur  $H$ , un full de hauteurs  $H_1$  et  $H_2$  ou une mini-suite de hauteur  $H$ , comme définies ci-dessous.

Exprimer en logique des prédicats du premier ordre les énoncés suivants :

1. Une distribution  $D$  contient une paire de hauteur  $H$  si et seulement si  $D$  contient exactement deux cartes de hauteur  $H$ .

2. Une distribution  $D$  contient un full de hauteurs  $H_1$  et  $H_2$  si et seulement si elle contient une paire de hauteur  $H_1$  et un brelan de hauteur  $H_2$ .
3. Une distribution  $D$  contient une *mini-suite* de hauteur  $H$  si et seulement si elle comprend 3 cartes de même couleur qui se suivent, dont la plus haute a pour valeur  $H$ .

### 3 Programmation logique

**Exercice 5** – Programmation de quelques combinaisons du poker – 3 points

Dans cet exercice, nous reprenons la description des combinaisons du poker introduites dans l'exercice précédent afin de programmer en PROLOG certaines d'entre elles.

1. Programmer en PROLOG, le prédicat  $carre(D, H)$  qui est satisfait s'il existe un carré de hauteur  $H$ , c'est-à-dire quatre cartes de hauteur  $H$ , dans une distribution  $D$ .
2. Programmer en PROLOG, le prédicat  $brelan(D, H)$  qui est satisfait s'il existe un brelan de hauteur  $H$  (c'est-à-dire trois cartes de hauteur  $H$ , mais pas de carré) dans une distribution  $D$ .  
*Remarque* : on peut faire appel au prédicat  $carre(D, H)$  pour s'assurer qu'il n'y a pas de carré.
3. Programmer en PROLOG, le prédicat  $paire(D, H)$  qui est satisfait s'il existe une paire (exactement deux cartes) de hauteur  $H$  dans une distribution  $D$ .

### 4 Logiques de description

**Exercice 6** – Représentation en logique de description  $\mathcal{ALCQ}$  – 5 points

On considère le formalisme de la logique  $\mathcal{ALCQ}$ , qui ajoute à la grammaire des concepts de la logique  $\mathcal{ALC}$  rappelée en annexe les concepts définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\exists^{\geq n} \langle \text{rôle} \rangle . \langle \text{concept} \rangle \quad \text{et} \quad \exists^{\leq n} \langle \text{rôle} \rangle . \langle \text{concept} \rangle$$

On considère les concepts  $As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, Tr\grave{e}fle, Pique, Carreau, Coeur$  ainsi que  $Distribution$ . On considère de plus les rôles  $dans$  et  $contient$  tels que  $dans(C, D)$  est satisfait si la carte  $C$  est dans la distribution  $D$  et  $contient(D, C)$  si la distribution  $D$  contient la carte  $C$ .

Ainsi, on peut définir que  $c_1$  est l'as de coeur en indiquant  $c_1 : As \sqcap Coeur$ .

Pour chacune des questions ci-dessous, indiquez si les formules sont écrites dans la A-Box ou à la T-Box.

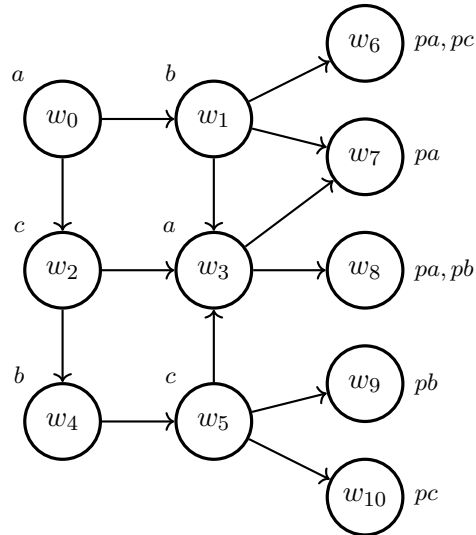
1. Traduire que  $d_1$  est une distribution qui contient le valet de pique.
2. Définir le concept  $Couleur\_Tr\grave{e}fle$  qui est satisfait par les distributions dont toutes les cartes sont de couleur trèfle.  
Dans la suite de l'exercice, on considère qu'on dispose de même des concepts  $Couleur\_Pique, Couleur\_Coeur$  et  $Couleur\_Carreau$ .
3. Définir le concept  $Meme\_Couleur$  qui est satisfait par les distributions dont toutes les cartes sont de la même couleur.
4. Définir le concept  $Paire\_Rois$  qui est satisfait par les distributions contenant exactement deux rois.
5. Ecrire qu'une distribution est un ensemble de cinq cartes.

### 5 Logique modale

**Exercice 7** Sémantique des mondes possibles (4 points)

On considère la structure de Kripke  $M$  suivante, utilisée pour modéliser un jeu (abstrait) à trois joueurs,  $A, B$  et  $C$ . Un monde représente un état du jeu. La relation d'accessibilité modélise le fait qu'un coup peut mener d'un état du jeu à un autre. Les propositions  $a, b$  et  $c$  sont utilisées pour indiquer quel joueur peut jouer au tour suivant. Les propositions  $pa, pb, pc$  indiquent respectivement que

le joueur  $A$ ,  $B$  et  $C$  a marqué un point. Un joueur gagne s'il est le seul à marquer un point, ou le seul à ne pas marquer de point. L'état initial du jeu est l'état  $w_0$ .



1. Les formules suivantes sont-elles vérifiées ?

(a)  $M, w_0 \models \Diamond \Box (pa \vee a)$

(b)  $M, w_2 \models \Box \Box \Box (pb \vee pc)$

2. Quelle interprétation intuitive pouvez-vous faire de la formule suivante ?

$$M, w_0 \models \Diamond \Diamond \Diamond ((pc \wedge \neg pa \wedge \neg pb) \vee (\neg pc \wedge pa \wedge pb))$$

3. On demande à présent d'écrire des formules permettant de vérifier des propriétés globales du jeu :

(a) Un seul joueur peut jouer à la fois

(b) Dans un état final (sans successeur), aucun joueur ne peut jouer

(c) Un joueur ne peut pas jouer deux fois d'affilée

4. On souhaiterait représenter la propriété "il existe une partie au cours de laquelle tous les joueurs ont joué". Qu'en pensez-vous ?