Sorbonne Université
Année 2021-2022

LRC - Examen réparti N° 1

M1 ANDROIDE
M1 DAC

1 Logique propositionnelle

Exercice 1 – Méthode des tableaux sémantiques – *2 points*

Démontrer la validité de $F = ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$, c'est-à-dire $\models F$, avec la méthode des tableaux sémantiques. Vous indiquerez la formule ré-écrite à chaque étape.

Correction : Il faut démontrer l'insatisfiabilité de $\neg F = \neg((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

Avec la règle α sur $\neg((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \end{array}}$$

On peut maintenant appliquer la règle α sur $\neg(A \to (B \to C))$ ce qui donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \end{array}}$$

d'où, avec la règle α sur $\neg(B \to C)$ on dérive :

$$\boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \end{array}}$$

En appliquant la règle β sur $((A \to B) \to (A \to C))$ on obtient deux tableaux :

$$T_1 : \boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \\ \neg(A \to B) \end{array}} \text{ et } T_2 : \boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \\ (A \to C) \end{array}}$$

L'application de la règle β $(A \to C)$ sur T_2 donne encore deux tableaux :

$$T_{2,1} : \boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \\ (A \to C) \\ \neg A \end{array}} \text{ et } T_{2,2} : \boxed{\begin{array}{l} ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \\ (A \to C) \\ C \end{array}}$$

qui contiennent tous les deux un clash.

Enfin, l'application de la règle α $\neg(A \to B)$ sur T_1 donne un tableaux qui contient un clash :

$$T_3 : \begin{array}{|l|}\hline ((A \to B) \to (A \to C)) \\ \neg(A \to (B \to C)) \\ A \\ \neg(B \to C) \\ B \\ \neg C \\ \neg(A \to B) \\ A \\ \neg B \\ \hline \end{array}$$

Exercice 2 – Système de Hilbert – *2 points*
Soit $G = (P \to Q) \to (P \to (R \to Q))$. Montrer que $\vdash G$ dans le système de Hilbert.
Correction : En utilisant le théorème de la déduction :

1. $P \to Q$ hypothèse
2. P hypothèse
3. R hypothèse
4. Q Modus Ponens 1, 2

Donc $P \to Q, P, R \vdash Q$.
Par théorème de la déduction, on a donc $P \to Q, P, \vdash R \to Q$
puis $P \to Q \vdash P \to (R \to Q)$
puis $\vdash (P \to Q) \to (P \to (R \to Q))$
Sans utilisr le théorème de la déduction

1. $(Q \to (R \to Q))$ Axiome 1
2. $((Q \to (R \to Q)) \to (P \to (Q \to (R \to Q)))$ Axiome 1
3. $(P \to (Q \to (R \to Q)))$ Modus Ponens 1, 2
4. $((P \to (Q \to (R \to Q))) \to ((P \to Q) \to (P \to (R \to Q))))$ Axiome 2
5. $((P \to Q) \to (P \to (R \to Q)))$ Modus Ponens 3, 4
   C.Q.F.D.

2 Logique des prédicats du premier ordre

Exercice 3 – Unification – *2 points*
Soit les couples de termes suivants :

1. $t_1 = f(x, y, g(a, a))$ et $t_2 = f(g(y, y), z, z)$
2. $t'_1 = f(x, g(x, b), a)$ et $t'_2 = f(g(y, y), g(y, b), y)$

où x, y, z sont des variables, f et g des fonctions, et a et b des constantes.
Pour chacun de ces couples, indiquez s'ils s'unifient. Lorsqu'il y a unification, donner l'unifieur le plus général, et dans le cas contraire, expliquer pourquoi l'unification échoue.
Correction :

1. $t_1 = f(x, y, g(a, a))$ et $t_2 = f(g(y, y), z, z)$
   $\sigma = \{x/g(g(a, a), g(a, a)), y/g(a, a), z/g(a, a)\}$
2. $t'_1 = f(x, y, a)$ et $t'_2 = f(y, g(z, z), x)$
   Échec à l'unification.

Exercice 4 – Représentation en logique des prédicats du premier ordre – *3 points*
On souhaite représenter différentes combinaisons du jeu de poker, dont on rappelle qu'il repose sur la distribution de cinq cartes.

On considère deux ensembles de constantes, l'ensemble des hauteurs et l'ensemble des couleurs, respectivement définis comme $\mathcal{H} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as\}$ et $\mathcal{C}$ ={*coeur*, *carreau*, *pique*, *trèfle*}.

On considère la fonction *carte* définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{C}$ qui permet de construire par exemple les termes *carte(dame, coeur)* ou *carte(5, pique)*.

Une distribution D correspond à un ensemble de cartes et on considère le prédicat $dans(Carte, D)$ qui est vrai si la distribution D contient la carte $Carte$ et faux sinon.

Par exemple, soit d_1 la constante qui correspond à la distribution contenant le roi de cœur, le roi de pique, le valet de carreau, le valet de trèfle et le deux de pique, c'est-à-dire à l'ensemble $\{carte(roi, coeur), carte(roi, pique), carte(valet, carreau), carte(valet, trèfle), carte(2, pique)\}$. On a alors $dans(carte(roi, coeur), d_1)$ est vrai, $dans(carte(2, carreau), d_1)$ est faux.

On définit de plus le prédicat $eq(X, Y)$ qui exprime que X est égal à Y et le prédicat $suivant(H_1, H_2)$ qui exprime que la hauteur H_2 suit immédiatement la hauteur H_1, selon l'ordre indiqué ci-dessous dans l'énumération de $\mathcal{H}$. On a par exemple $suivant(10, valet)$ est vrai, mais $suivant(as, roi)$ est faux de même que $suivant(9, dame)$.

Les questions suivantes utilisent de plus les prédicats $paire(D, H)$, $brelan(D, H)$, $full(D, H_1, H_2)$ et $msuite(D, H)$ pour exprimer des propriétés des distributions et indiquer respectivement, que D contient une paire de hauteur H, un brelan de hauteur H, un full de hauteurs H_1 et H_2 ou une mini-suite de hauteur H, comme définies ci-dessous.

Exprimer en logique des prédicats du premier ordre les énoncés suivants :

1. Une distribution D contient une paire de hauteur H si et seulement si D contient exactement deux cartes de hauteur H.

   Correction :
   $\forall D \forall H (paire(D, H) \Leftrightarrow \exists C_1, \exists C_2((dans(carte(H, C_1), D) \wedge dans(carte(H, C_2), D) \wedge \neg eq(C_1, C_2)) \wedge$
   $\forall C_3(dans(carte(H, C_3), D) \rightarrow (eq(C_3, C_1) \vee eq(C_3, C_2))))$

2. Une distribution D contient un full de hauteurs H_1 et H_2 si et seulement si elle contient une paire de hauteur H_1 et un brelan de hauteur H_2.

   Correction : $\forall D \forall H_1 \forall H_2 (full(D, H_1, H_2)) \Leftrightarrow (paire(D, H_1) \wedge brelan(D, H_2))$
   Remarque, il est correct mais superflu d'ajouter à droite $\neg eq(H_1, H_2)$

3. Une distribution D contient une *mini-suite* de hauteur H si et seulement si elle comprend 3 cartes de même couleur qui se suivent, dont la plus haute a pour valeur H.

   Correction :
   $\forall D \forall H (suite(D, H) \Leftrightarrow \exists H_1, \exists H_2, \exists C(dans(carte(H_1, C), D) \wedge dans(carte(H_2, C), D) \wedge$
   $dans(carte(H, C), D) \wedge suivant(H_1, H_2) \wedge suivant(H_2, H)))$

3 Programmation logique

Exercice 5 – Programmation de quelques combinaisons du poker – *3 points*
Dans cet exercice, nous reprenons la description des combinaisons du poker introduites dans l'exercice précédent afin de programmer en PROLOG certaines d'entre elles.

1. Programmer en PROLOG, le prédicat $carre(D, H)$ qui est satisfait s'il existe un carré de hauteur H, c'est-à-dire quatre cartes de hauteur H, dans une distribution D.

   Correction :
   ```
   carre(D, H) :- dans(carte(H, C1), D), dans(carte(H, C2), D),
   dans(carte(H, C3), D), dans(carte(H, C4), D),
   C1 != C2, C1!=C3, C1!=C4, C2!=C3, C2!=C4, C3!=C4.
   ```

   N.B. on peut simplifier si on joue avec un jeu de cartes normal : il doit y avoir chaque couleur de H, donc
   ```
   carre(D, H) :- dans(carte(H, coeur), D), dans(carte(H, carreau), D),
   dans(carte(H, pique), D), dans(carte(H, trefle), D).
   ```

2. Programmer en PROLOG, le prédicat $brelan(D, H)$ qui est satisfait s'il existe un brelan de hauteur H (c'est-à-dire trois cartes de hauteur H, mais pas de carré) dans une distribution D.
   Remarque : on peut faire appel au prédicat $carre(D, H)$ pour s'assurer qu'il n'y a pas de carré.

   Correction : `brelan(D, H) :- dans(carte(H, C1), D), dans(carte(H, C2), D), dans(carte(H, C3), D), C1 != C2, C1 != C3, C2 != C3, not carre(D, H).`

3. Programmer en PROLOG, le prédicat $paire(D, H)$ qui est satisfait s'il existe une paire (exactement deux cartes) de hauteur H dans une distribution D.

   Correction : `paire(D, H) :- dans(carte(H, C1), D), dans(carte(H, C2), D), C1 != C2, not brelan(D, H).`

4 Logiques de description

Exercice 6 – Représentation en logique de description $\mathcal{ALCQ}$ – *5 points*

On considère le formalisme de la logique $\mathcal{ALCQ}$, qui ajoute à la grammaire des concepts de la logique $\mathcal{ALC}$ rappelée en annexe les concepts définis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\exists^{\geq n} \quad \langle \text{rôle} \rangle.\langle \text{concept} \rangle \qquad \text{et} \qquad \exists^{\leq n} \quad \langle \text{rôle} \rangle.\langle \text{concept} \rangle$$

On considère les concepts *As*, *Roi*, *Dame*, $Valet$, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, $Trèfle$, *Pique*, $Carreau$, $Coeur$ ainsi que *Distribution*. On considère de plus les rôles *dans* et *contient* tels que $dans(C, D)$ est satisfait si la carte C est dans la distribution D et $contient(D, C)$ si la distribution D contient la carte C.

Ainsi, on peut définir que c_1 est l'as de coeur en indiquant $c_1 : As \sqcap Coeur$.

Pour chacune des questions ci-dessous, indiquez si les formules sont écrites dans la A-Box ou à la T-Box.

1. Traduire que d_1 est une distribution qui contient le valet de pique.

   Correction : On écrit dans la A-Box
   $vp : Valet \sqcap Pique$
   $d_1 : Distribution$
   $\langle d_1, vp \rangle : contient$

2. Définir le concept $Couleur\_Trèfle$ qui est satisfait par les distributions dont toutes les cartes sont de couleur trèfle.

   Dans la suite de l'exercice, on considère qu'on dispose de même des concepts $Couleur\_Pique$, $Couleur\_Coeur$ et $Couleur\_Carreau$.

   Correction : On écrit dans la T-Box
   $Couleur\_Trèfle \equiv Distribution \sqcap \forall contient.Trèfle$

3. Définir le concept $Meme\_Couleur$ qui est satisfait par les distributions dont toutes les cartes sont de la même couleur.

   Correction : On écrit dans la T-Box
   $Meme\_Couleur \equiv Couleur\_Trèfle \sqcup Couleur\_Pique \sqcup Couleur\_Coeur \sqcup Couleur\_Carreau$

4. Définir le concept $Paire\_Rois$ qui est satisfait par les distributions contenant exactement deux rois.

   Correction : On écrit dans la T-Box
   $Paire\_Rois \equiv Distribution \sqcap (\exists^{\geq 2} contient.Roi \sqcap \exists^{\leq 2} contient.Roi)$

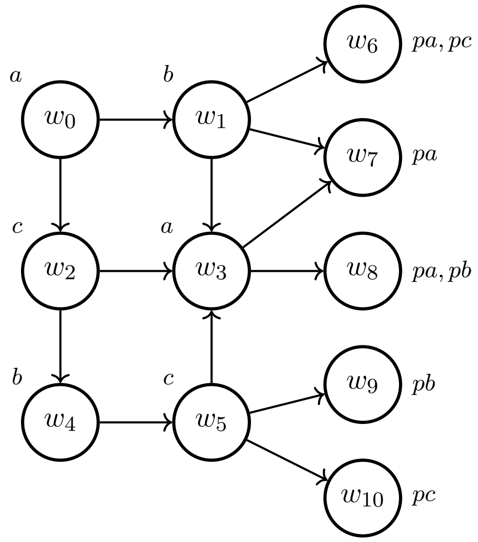
5. Ecrire qu'une distribution est un ensemble de cinq cartes.

   Correction : On écrit dans la T-Box
   $Distribution \sqsubseteq (\exists^{\geq 5} contient.\top \sqcap \exists^{\leq 5} contient.\top)$

5 Logique modale

Exercice 7 Sémantique des mondes possibles *(4 points)*

On considère la structure de Kripke M suivante, utilisée pour modéliser un jeu (abstrait) à trois joueurs, A, B et C. Un monde représente un état du jeu. La relation d'accessibilité modélise le fait qu'un coup peut mener d'un état du jeu à un autre. Les propositions a, b et c sont utilisées pour indiquer quel joueur peut jouer au tour suivant. Les propositions pa, pb, pc indiquent respectivement que le joueur A, B et C a marqué un point. Un joueur gagne s'il est le seul à marquer un point, ou le seul à ne pas marquer de point. L'état initial du jeu est l'état w_0.



1. Les formules suivantes sont-elles vérifiées ?
   (a) $M, w_0 \models \Diamond\Box(pa \vee a)$
   (b) $M, w_2 \models \Box\Box\Box(pb \vee pc)$

   Correction : oui / non

2. Quelle interprétation intuitive pouvez-vous faire de la formule suivante ?

$$M, w_0 \models \Diamond\Diamond\Diamond((pc \wedge \neg pa \wedge \neg pb) \vee (\neg pc \wedge pa \wedge pb))$$

   Correction : Il existe une partie en 3 coups où C gagne

3. On demande à présent d'écrire des formules permettant de vérifier des propriétés globales du jeu :
   (a) Un seul joueur peut jouer à la fois
   (b) Dans un état final (sans successeur), aucun joueur ne peut jouer
   (c) Un joueur ne peut pas jouer deux fois d'affilée

   Correction :
   (a) $M \models \neg((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c))$
   (b) $M \models \neg \diamond T \to (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$
   (c) $M \models (a \to \neg\Diamond a) \wedge (b \to \neg\Diamond b) \wedge (c \to \neg\Diamond c)$

4. On souhaiterait représenter la propriété "il existe une partie au cours de laquelle tous les joueurs ont joué". Qu'en pensez-vous ?

   Correction :Pas représentable "simplement" avec le modèle proposé, sauf à lister explicitement toutes les possibilités, faisable ici car nombre de coups borné, par ex. $a \wedge \Diamond(b \wedge \Diamond c))$....