Sorbonne Université Année 2019-2020

LRC - Examen réparti n° 1

M1 ANDROIDE
M1 DAC

Correction : **Eléments de correction**
Durée 2h - documents et calculatrices non autorisés
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

1 Logique classique

Nous considérons dans les exercices 1 et 5 les six propositions suivantes :

(a) "Les Ménines" est un tableau peint par Velázquez.

(b) Tous les peintres ont peint au moins un tableau.

(c) Les tableaux sont peints par un peintre et un seul.

(d) "Les Ménines" est une série de tableaux peints par Picasso.

(e) Picasso s'est inspiré de Velázquez, mais Picasso n'est pas Velázquez.

(f) Velázquez n'a peint aucun tableau de la série "Les Ménines"

Exercice 1 – Représentation en logique des prédicats du premier ordre – *3 points*
Traduire en logique des prédicats du premier ordre les six propositions *a, b, c, d, e, f* en faisant appel aux prédicats unaires $peintre(x)$ et $tableau(x)$ ainsi qu'aux prédicats binaires $a\_peint(x, y)$, $inspiré\_par(x, y)$, $dans\_série(x, y)$ et $eq(x, y)$.
Correction :

(a) "Les Ménines" est un tableau peint par Velázquez : $tableau(\text{“}LesMénines''') \wedge a\_peint(Velázquez, \text{“}LesMénines'')$

(b) Tous les peintres ont peint au moins un tableau : $\forall x(peintre(x) \rightarrow \exists y(tableau(y) \wedge a\_peint(x, y)))$

(c) Les tableaux sont peints par un peintre et un seul. $\forall x(tableau(x) \rightarrow \exists y(peintre(y) \wedge a\_peint(y, x)))$ et $(\forall x \forall y \forall z(tableau(x) \wedge a\_peint(y, x) \wedge a\_peint(z, x)) \rightarrow eq(y, z))$

(d) "Les Ménines" est une série de tableaux peints par Picasso.$\forall x(dans\_série(x, \text{“}LesMénines'') \rightarrow (tableau(x) \wedge a\_peint(Picasso, x)))$

(e) Picasso s'est inspiré de Velázquez, mais Picasso n'est pas Velázquez. $inspiré\_par(Picasso, Vélazquez) \wedge \neg eq(Picasso, Velázquez)$

(f) Velázquez n'a peint aucun tableau de la série "Les Ménines" $\forall x((tableau(x) \wedge dans\_série(x, \text{“}LesMénines'')) \rightarrow \neg a\_peint(Vélazquez, x))$

Exercice 2 – Démonstration avec la règle de résolution – *3 points*
Soit $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}\}$ l'ensemble des 12 clauses suivantes où x, y et z sont des variables universellement quantifiées et a, b, "$LesMénines''$", $Picasso$ et $Vélazquez$ des constantes :

$C_1 : \neg tableau(x) \vee \neg a\_peint(y, x) \vee \neg a\_peint(z, x) \vee eq(y, z)$

$C_2 : tableau(\text{“}LesMénines'')$

$C_3 : \neg tableau(x) \vee a\_peint(b, x)$

$C_4 : inspiré\_par(Picasso, Vélazquez)$

$C_5 : a\_peint(Velázquez, \text{“}LesMénines'')$

$C_6 : \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines'') \vee tableau(x)$

$C_7 : \neg peintre(x) \vee a\_peint(x, a)$

$C_8 : \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines''\text{)} \vee a\_peint(Picasso, x)$

$C_9 : \neg eq(Picasso, Velázquez)$

$C_{10} : \neg peintre(x) \vee tableau(a)$

$C_{11} : \neg tableau(x) \vee peintre(b)$

$C_{12} : \neg tableau(x) \vee \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines'') \vee \neg a\_peint(Vélazquez, x)$

Montrer en utilisant la règle de résolution que $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} \vdash C_{12}$.

Correction :

1. Démonstration Il suffit d'ajouter aux clauses $C_1 ... C_{11}$ la négation de la conclusion que l'on cherche à démontrer, à savoir la négation de C_{12} : $\neg tableau(x) \vee \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines'')) \vee \neg a\_peint(Vélazquez, x)$ ce qui donne les trois clauses C_{13}, C_{14} et C_{15} (voir ci-dessous).
   (a) $C_1 : \neg tableau(x) \vee \neg a\_peint(y, x) \vee \neg a\_peint(z, x) \vee eq(y, z)$
   (b) $C_2 : tableau(\text{“}LesMénines'')$
   (c) $C_3 : \neg tableau(x) \vee a\_peint(b, x)$
   (d) $C_4 : inspiré\_par(Picasso, Vélazquez)$
   (e) $C_5 : a\_peint(Velázquez, \text{“}LesMénines'')$
   (f) $C_6 : \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines'') \vee tableau(x)$
   (g) $C_7 : \neg peintre(x) \vee a\_peint(x, a)$
   (h) $C_8 : \neg dans\_série(x, \text{“}LesMénines'') \vee a\_peint(Picasso, x)$
   (i) $C_9 : \neg eq(Picasso, Vélazquez)$
   (j) $C_{10} : \neg peintre(x) \vee tableau(a)$
   (k) $C_{11} : \neg tableau(x) \vee peintre(b)$
   (l) $C_{13} : tableau(c)$
   (m) $C_{14} : dans\_série(c, \text{“}LesMénines'')$
   (n) $C_{15} : a\_peint(Vélazquez, c)$
   (o) la résolution de C_{14} et C_9 donne $C_{16} : a\_peint(Picasso, c)$
   (p) la résolution de C_{13} et C_7 donne $C_{17} : \neg a\_peint(y, c) \vee \neg a\_peint(z, c) \vee eq(y, z)$
   (q) la résolution de C_{17} et de C_{16} donne $C_{18} : \neg a\_peint(z, c) \vee eq(Picasso, z)$
   (r) la résolution de C_{18} et de C_{15} donne $C_{19} : eq(Picasso, Vélazquez)$
   (s) la résolution de C_{19} et de C_9 donne la clause vide
   C.Q.F.D.

Exercice 3 – Démonstration avec la méthode des tableaux – *3 points*

Montrer avec la méthode des tableaux (rappelée en annexe), en justifiant la réponse et en précisant à chaque étape la règle appliquée et la formule traitée, si la formule
$F = (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ est valide, satisfiable ou insatisfiable.
Remarque : A, B et C sont trois variables propositionnelles.

Correction : Prendre la négation de la formule, ce qui donne : $\neg((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$

1. $T_0 : \neg((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$
2. En appliquant la règle $\alpha\ R_{\neg\to}$ sur la seule expression de T_0 on obtient
   $T_1 : \{\neg((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))), (A \to B), \neg((B \to C) \to (A \to C))\}$
3. En appliquant la règle $\alpha\ R_{\neg\to}$ sur la dernière expression de T_1 on obtient
   $T_2 : \{\neg((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))), (A \to B), \neg((B \to C) \to (A \to C)), (B \to C), \neg(A \to C)\}$

4. En appliquant la règle $\alpha\ R_{\neg\rightarrow}$ sur la dernière expression de T_2 on obtient
$T_3 : \{\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))), (A \rightarrow B), \neg((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)), (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C), A, \neg C\}$
5. En appliquant la règle $\beta\ R_{\rightarrow}$ sur $(A \rightarrow B)$ dans T_3 on obtient :
$T_4^1 : \{\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))), (A \rightarrow B), \neg((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)), (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C), A, \neg C, \neg A\}$ et
$T_4^2 : \{\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))), (A \rightarrow B), \neg((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)), (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C), A, \neg C, B\}$
6. T_4^1 contient une contradiction
7. En appliquant la règle $\beta\ R_{\rightarrow}$ sur $(B \rightarrow C)$ dans T_4^2 on obtient :
$T_5^1 : \{\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))), (A \rightarrow B), \neg((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)), (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C), A, \neg C, B, \neg B\}$ et
$T_5^2 : \{\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))), (A \rightarrow B), \neg((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)), (B \rightarrow C), \neg(A \rightarrow C), A, \neg C, B, C\}$
8. T_5^1 et T_5^2 sont tous les deux contradictoires. C.Q.F.D.

2 Prolog

Exercice 4 – Écriture d'un programme en PROLOG – *4 points*

1. Programmer la fonction `appartient(X, Y, Z)` qui instancie `X` avec un élément de la liste `Y` et `Z` avec la liste `Y` sans l'élément `X`.
Exemple : l'appel à `appartient(X, ['a', 'b', 'c'], Z)` aura trois solutions :
1) `X = 'a'; Z = ['b', 'c']`
2) `X = 'b'; Z = ['a', 'c']`
3) `X = 'c'; Z = ['a', 'b']`
2. Écrire en Prolog le prédicat `permutation(X, Y)` qui instancie `Y` avec toutes les permutations de la liste `X`.
Exemple : l'appel à `permutation(['a', 'b', 'c'], Y)` aura 6 solutions :
1) `Y = ['a', 'b', 'c']`
2) `Y = ['a', 'c', 'b']`
3) `Y = ['b', 'a', 'c']`
4) `Y = ['b', 'c', 'a']`
5) `Y = ['c', 'a', 'b']`
6) `Y = ['c', 'b', 'a']`

Correction :

```
appartient(X, [X|L], L).
appartient(X, [Y|L], [Y|Z]) :- appartient(X, L, Z).
permutation([], []).
permutation(L, [X|R]) :- appartient(X, L, Z), permutation(Z, R).
```

3 Logique de description

Exercice 5 – Représentation en logique de description – *3 points*

Représenter les trois propositions *a, b, c* décrite dans la partie 1 en logique de description $\mathcal{ALCIQ}$, en distinguant explicitement la TBox et la ABox et en utilisant les concepts $Tableau$ et $Peintre$ ainsi que le rôle a_peint.

Remarque : on rappelle que $\mathcal{I}$ signifie que l'on peut avoir des inversions de rôle et que $\mathcal{Q}$ indique que l'on peut avoir des restrictions qualifiées sur les cardinalités, par exemple $\exists^{>=3} a\_enfant.Femme$ qui désigne les personnes qui ont plus de trois filles.

Correction :

(i) Tbox :

(a) $Peintre \sqsubseteq \exists a\_peint.Tableau$

(b) $Tableau \sqsubseteq \exists a\_peint^{-1}.Peintre$

(c) $Tableau \sqsubseteq \exists^{<=1} a\_peint^{-1}.Peintre$

(ii) Abox :

(a) $``LesMénines : Tableau$

(b) $< Velázquez, ``LesMénines'' >: a\_peint$

4 Logique modale

Exercice 6 *1 point*

On sait que dans la logique K, on a $\neg\Box\neg\phi \equiv \Diamond\phi$, où ϕ est une formule quelconque.
Mais est-il vrai que $\neg\Box\Box\neg\phi \equiv \Diamond\Diamond\phi$? Justifiez votre réponse.
Correction : Appliquons une deuxième fois l'équivalence sur les deux formules équivalentes. On a alors $\neg\Box\neg\neg\Box\neg\phi \equiv \Diamond\Diamond\phi$, soit $\neg\Box\Box\neg\phi \equiv \Diamond\Diamond\phi$

Exercice 7 — *3 points*

On considère la logique S4, définie par les axiomes (T) $\Box\phi \rightarrow \phi$, et (4) $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$. Les propriétés correspondantes dans les structures de Kripke sont la réflexivité et la transitivité.

1. Montrer que $\Diamond\Box\phi \rightarrow \phi$ n'est pas valide dans cette logique.
2. Montrer que $\Diamond\Diamond\phi \rightarrow \Diamond\phi$ est valide dans cette logique.

Correction :

1. $\{w_1, w_2\}, R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_1), (w_2, w_2), I(p) = \{w_2\}$
2. Par raisonnement sémantique. Supposons que la formule soit fausse. Il existe donc un modèle (réfléxif et transitif) M et un monde w, tels que (i) $M, w \models \Diamond\Diamond\phi$ est vraie, tandis que (ii) $M, w \models \Diamond\phi$ est fausse. (i) signifie que il existe un monde accessible w' depuis lequel il existe un monde accessible w'' pour lequel on a $M, w'' \models \phi$. Par transitivité, w'' est accessible depuis w, contradiction avec (ii).

5 Annexe

5.1 Méthode des tableaux sémantiques pour la logique des propositions

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

5.1.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés α et β.

Nom	Formule α	α_1	α_2
$R_{\neg\neg}$	$\neg\neg\varphi$	φ	φ
$R_{\wedge}$	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	φ_1	φ_2
$R_{\neg\vee}$	$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$R_{\neg\rightarrow}$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	φ_1	$\neg\varphi_2$
$R_{\leftrightarrow}$	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$

Nom	Formule β	β_1	β_2
$R_{\vee}$	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	φ_1	φ_2
$R_{\neg\wedge}$	$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$R_{\rightarrow}$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	φ_2
$R_{\neg\leftrightarrow}$	$\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$

5.1.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - sinon, choisir une formule F de l'étiquette du nœud
    - si elle est de type α
      - créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont les formules obtenues par réécriture de F
    - sinon (si elle est de type β)
      - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où β_1 et β_2 sont les formules obtenues par réécriture de F

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.