**Correction** : **Eléments de correction**
**Durée 2h - documents et calculatrices non autorisés**
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

## 1 Logique classique

Nous considérons dans les exercices 1, 2, 4 et 5, les six propositions suivantes :

*(a)* Les chevaux sont plus rapides que les chiens.
En anglais, *Horses are faster than dogs.*

*(b)* Il existe un lévrier plus rapide que tout lapin.
En anglais, *There exists a greyhound that is faster than all rabbits.*

*(c)* Les lévriers sont des chiens.
En anglais, *Greyhounds are dogs.*

*(d)* Henri est un cheval.
En anglais, *Henri is a horse.*

*(e)* Ronan est un lapin.
En anglais, *Ronan is a rabbit.*

*(f)* Si X est plus rapide que Y et Y est plus rapide que Z, alors X est plus rapide que Z.
En anglais, *if X is faster than Y and Y is faster than Z, then X is faster than Z.*

**Exercice 1** – Représentation en logique des prédicats du premier ordre – *2.5 points*

Traduire en logique des prédicats du premier ordre les six propositions *a, b, c, d, e, f* en faisant appel aux prédicats unaires $lévrier(x)$ (lévrier means greyhound in English), $lapin(x)$ (lapin means rabbit in English), $chien(x)$ (chien means dog in English) et $cheval(x)$ (cheval means horse in English), ainsi qu'au prédicat binaire $plus\_rapide(x, y)$ (plus_rapide means faster in English).

**Correction** :

(a) Les chevaux sont plus rapides que les chiens : $\forall x \forall y[(cheval(x) \land chien(y)) \rightarrow plusrapide(x, y)]$

(b) Il existe un lévrier plus rapide que tout lapin : $\exists x[lévrier(x) \land \forall y(lapin(y) \rightarrow plusrapide(a, y))]$

(c) Les lévriers sont des chiens : $\forall x(lévrier(x) \rightarrow chien(x))$

(d) Henri est un cheval : $cheval(Henri)$

(e) Ronan est un lapin : $lapin(Ronan)$

(f) Si X est plus rapide que Y et Y est plus rapide que Z, alors X est plus rapide que Z :
$\forall x \forall y \forall z[(plusrapide(x, y) \land plusrapide(y, z)) \rightarrow plusrapide(x, z)]$

**Exercice 2** – Démonstration avec la règle de résolution – *5 points*

1. Mettre les formules *a, b, c, d, e, f* sous forme de clause, c'est-à-dire de conjonctions, universellement quantifiées, de disjonctions de littéraux.

   Pour la formule correspondant à la proposition *b*, il faut pour cela introduire un nouveau symbole de constante, représentant l'individu dont l'existence est indiquée dans l'assertion.

2. Montrer que *Henri est plus rapide que Ronan* découle de *a, b, c, d, e, f* en utilisant la règle de résolution.

**Correction** :

1. Mise sous forme de clauses
   (a) Les chevaux sont plus rapides que les chiens : $\forall x \forall y(cheval(x) \wedge chien(y) \to plusrapide(x, y))$ donne sous forme de clauses $\neg cheval(x) \vee \neg chien(y) \vee plusrapide(x, y)$
   (b) Il existe un lévrier plus rapide que tout lapin : $\exists x(lévrier(x) \wedge \forall y(lapin(y) \to plusrapide(x, y)))$ donne sous forme de clause $lévrier(a)$ et $\neg lapin(y) \vee plusrapide(a, y)$
   (c) Les lévriers sont des chiens : $\forall x(lévrier(x) \to chien(x))$ donne $\neg lévrier(x) \vee chien(x)$
   (d) Henri est un cheval : $cheval(Henri)$
   (e) Ronan est un lapin : $lapin(Ronan)$
   (f) Si X est plus rapide que Y et Y est pas plus rapide que Z alors X est plus rapide que Z : $\forall x \forall y \forall z(plusrapide(x, y) \wedge plusrapide(y, z)) \to plusrapide(x, z)$ : $\neg plusrapide(x, y) \vee \neg plusrapide(y, z) \vee plusrapide(x, z)$
2. Démonstration
   (a) $C_1$ : $\neg cheval(x) \vee \neg chien(y) \vee plusrapide(x, y)$
   (b) $C_2$ : $lévrier(a)$
   (c) $C_3$ : $\neg lapin(y) \vee plusrapide(a, y)$
   (d) $C_4$ : $\neg lévrier(x) \vee chien(x)$
   (e) $C_5$ : $cheval(Henri)$
   (f) $C_6$ : $lapin(Ronan)$
   (g) $C_7$ : $\neg plusrapide(x, y) \vee \neg plusrapide(y, z) \vee plusrapide(x, z)$
   (h) $C_8$ : $\neg plusrapide(Henri, Ronan)$
   (i) $C_9$ : résolution $C_2$ et $C_4$ : $\to chien(a)$
   (j) $C_{10}$ : résolution $C_9$ et $C_1$ : $\to \neg cheval(x) \vee plusrapide(x, a)$
   (k) $C_{11}$ : résolution $C_{10}$ et $C_5$ : $\to plusrapide(Henri, a)$
   (l) $C_{12}$ : résolution $C_{11}$ et $C_7$ : $\to \neg plusrapide(a, z) \vee plusrapide(Henri, z)$
   (m) $C_{13}$ : résolution $C_{12}$ et $C_8$ : $\to \neg plusrapide(a, Ronan)$
   (n) $C_{14}$ : résolution $C_{13}$ et $C_3$ : $\to \neg lapin(Ronan)$
   (o) $C_{15}$ : résolution $C_{14}$ et $C_6$ : $\to \emptyset$ C.Q.F.D.

**Exercice 3** – Démonstration avec la méthode des tableaux – *3 points*

On considère trois variables propositionnelles $p$, $q$ et $r$.
Démontrer avec la méthode des tableaux (voir annexe) la validité de la formule suivante :

$$F = (p \wedge q) \vee r \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

Préciser à chaque étape la règle appliquée et la formule traitée.

**Correction** : Prendre la négation de la formule, ce qui donne : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$

1. $T_0$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee r)$
2. Application règle $\alpha$ trois fois donne :$T_1$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$
3. Application règle $\beta$ donne deux tableaux :
   $T_2^1$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $p$ et
   $T_2^2$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $r$
4. $T_2^2$ contient une contradiction

5. Application règle $\beta$ sur $T_2^1$ donne deux tableaux :
   $T_3^1$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $p$, $\neg p$ et
   $T_3^2$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $p$, $\neg q$
6. $T_3^1$ est contradictoire
7. Application règle $\beta$ sur $T_2^1$ donne deux tableaux :
   $T_4^1$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $p$, $\neg q$, $r$ et
   $T_4^2$ : $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$,$(\neg p \vee \neg q)$, $\neg r$, $(q \vee r)$, $(p \vee r)$, $p$, $\neg q$ , $q$
8. Les deux tableaux $T_4^1$ et $T_4^2$, sont contradictoires C.Q.F.D.

# 2 Prolog

**Exercice 4** – Ecriture d'un programme en PROLOG – *3.5 points*

1. Formuler les six propositions *a, b, c, d, e, f* décrite dans la partie 1 sur la logique classique, en Prolog.
   Pour la proposition *b*, il faut pour cela introduire une constante permettant de nommer l'individu dont l'existence est indiquée dans l'assertion.
2. Indiquer comment on peut utiliser Prolog pour prouver que *Henri est plus rapide que Ronan* découle des six propositions *a, b, c, d, e, f.*

**Correction** :

1. Mise sous forme de clauses
   (a) `plusrapide(X, Y):- cheval(X), chien(X).`
   (b) `lévrier(a)`
   (c) `plusrapide(a, Y) :- lapin(Y)`
   (d) `chien(X) :- lévrier(X)`
   (e) `cheval(henri)`
   (f) `lapin(ronan)`
   (g) `plusrapide(X, Z) :- plusrapide(X, Y), plusrapide(Y, Z)`
2. Démonstration en Prolog : il suffit d'appeler l'interprète avec la requête `>> plusrapide(henri, ronan)`

# 3 Logique de description

**Exercice 5** – Représentation en logique de description – *3 points*

Représenter les cinq propositions *a, b, c, d, e** décrite dans la partie 1 sur la logique classique, en logique de description $\mathcal{ALCI}$, en distinguant explicitement la TBox et la ABox.

Cette représentation peut faire appel aux concepts `lévrier`, `lapin`, `chien` et `cheval`, ainsi qu'au rôle `plus_rapide`.

* On ne cherchera pas à représenter la proposition $f$ qui exige des rôles transitifs.

**Correction** :

(i) On utilisera les concepts $Lévrier$, $Chien$, $Lapin$, $Cheval$ et le rôle *plusrapide.*

(ii) Tbox :
   (a) $Cheval \sqsubseteq \forall plusrapide.Chien$
       $Cheval \sqsubseteq \neg\exists plus\_rapide^{-1}.Chien$
   (b) $Lévrier \sqsubseteq Chien$

(iii) Abox :
   (a) $a$ : $Lévrier$

(b) $a : \neg\exists plus\_rapide^{-1}.Lapin$

(c) $henri : Cheval$

(d) $ronan : Lapin$

## 4 Logique modale

Note : Les propositions $a$, $b$, $c$ utilisées dans cette partie sont sans lien avec celles du reste de l'examen.

**Exercice 6** – Logique modale normale – *1.5 points*
Montrez que la formule $\Box\Box\Box\Box\Box(a \vee b \vee c \vee \neg b)$ est valide, dans toute logique modale normale.
**Correction** : Il suffit de remarquer que $(a \vee b \vee c \vee \neg b)$ est une tautologie, puis d'appliquer la necessitation plusieurs fois.

**Exercice 7** – Modèle de Kripke – *1.5 points*
Compléter (si c'est possible, sinon expliquer pourquoi) le modèle de Kripke $M$ comportant trois mondes $\{w_1, w_2, w_3\}$, avec $\pi(a) = \{w_1\}$, $\pi(b) = \{w_2\}$, $\pi(c) = \{w_3\}$ en donnant une relation d'accessibilité $R$ entre mondes qui respecte la sérialité $(\forall w, \exists w' : (w, w') \in R)$ et la symétrie $(\forall (w, w') : (w, w') \in R \rightarrow (w', w) \in R)$, et telle que les trois formules suivantes soient valides dans ce modèle :

- $a \rightarrow \neg\Diamond b \wedge \neg\Diamond c$
- $b \rightarrow \neg\Diamond b \wedge \Diamond(a \vee c)$
- $c \rightarrow \neg\Diamond c \wedge \Diamond(a \vee b)$

**Correction** : C'est possible, par ex. $(w_1, w_1), (w_2, w_3), (w_3, w_2)$

# 5 Annexe

## 5.1 Méthode des tableaux sémantiques pour la logique des propositions

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

### 5.1.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés $\alpha$ et $\beta$.

| Nom | Formule $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|---|
| $R_{\neg\neg}$ | $\neg\neg\varphi$ | $\varphi$ | $\varphi$ |
| $R_{\wedge}$ | $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $R_{\neg\vee}$ | $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $R_{\neg\rightarrow}$ | $\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ | $\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $R_{\leftrightarrow}$ | $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ | $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ | $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ |

| Nom | Formule $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|
| $R_{\vee}$ | $\varphi_1 \vee \varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $R_{\neg\wedge}$ | $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ | $\neg\varphi_1$ | $\neg\varphi_2$ |
| $R_{\rightarrow}$ | $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ | $\neg\varphi_1$ | $\varphi_2$ |
| $R_{\neg\leftrightarrow}$ | $\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ | $\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$ |

### 5.1.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - — si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - — sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - — sinon, choisir une formule $F$ de l'étiquette du nœud
    - — si elle est de type $\alpha$
      - — créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - — lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$
    - — sinon (si elle est de type $\beta$)
      - — créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - — leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les formules obtenues par réécriture de $F$

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.

## 5.2 Logique de description $\mathcal{ALC}$

### 5.2.1 Alphabet

- Concepts atomiques : $A$, $B$, $C$, ...
- Rôles atomiques : $R$, $S$, $U$, $V$, ...
- Symboles : $\{\sqcup, \sqcap, \exists, \forall, \neg, \top, \bot, .\}$
- Instances de concepts : $a$, $b$, ...

### 5.2.2 Base de connaissances

- TBox - Axiomes terminologiques :

  Définitions : $C \equiv D$

  Subsomptions : $C \sqsubseteq D$ (se lit *C est subsumé par D*)
- ABox - Assertions :

  Assertions de concepts : $a : C$

  Assertions de rôles : $\langle a, b\rangle : R$

### 5.2.3 Grammaire

concept : := ⟨concept atomique⟩
| $\top$
| $\bot$
| $\neg$⟨concept⟩
| ⟨concept⟩ $\sqcap$ ⟨concept⟩
| ⟨concept⟩ $\sqcup$ ⟨concept⟩
| $\exists$ ⟨rôle⟩.⟨concept⟩
| $\forall$ ⟨rôle⟩.⟨concept⟩

### 5.2.4 Sémantique de $\exists$ et $\forall$

Etant donné une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, .^{\mathcal{I}})$, on a :

- $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \exists y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \forall y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$

### 5.2.5 Extension $\mathcal{I}$

Grammaire : Si $R$ est un rôle, $R^{-1}$ est un rôle.

Sémantique : $(R^{-1})^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}, (y, x) \in R^{\mathcal{I}}\}$