UPMC Année 2016-2017	# LRC - Examen réparti n° 1	M1 ANDROIDE M1 DAC

Durée 2h - aucun document autorisé

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

1 Logique classique

Exercice 1 – Logique propositionnelle - syntaxe – *2 points*
Considérer la formule $F = ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (\neg r \to (p \to r)))$
Démontrer $\vdash F$ en utilisant le système de Hilbert (voir les rappels en annexe) et en justifiant chaque étape de la démonstration.

Exercice 2 – Logique propositionnelle - sémantique – *2 points*

1. Montrer en ayant recours aux tables de vérité que $\models F$
2. Montrer que $\models F$ avec la méthode des tableaux (voir les rappels en annexe).

Exercice 3 *Prolog – 2 points*
Définir en *Prolog* les prédicats `bru/2` et `gendre/2`, sachant que la bru est la femme d'un enfant et le gendre, le mari d'un enfant, en faisant appel aux prédicats `marié/2`, qui stipule que deux individus sont mariés, `parent/2`, qui indique une relation de parenté directe (père ou mère), `masculin/1` et `féminin/1`, qui précisent le sexe.

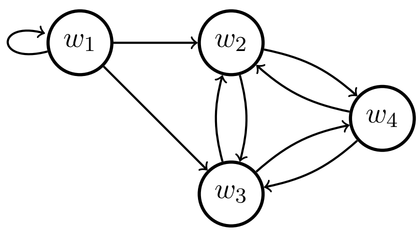
Exercice 4 – Représentation en logique des prédicats du premier ordre – *1 point*
Exprimer en logique des prédicats du premier ordre, avec les prédicats $Aime/2$, $Bru/2$, $Gendre/2$, $Masculin/2$ et $Féminin/2$, cet aphorisme tiré des *Caractères* de La Bruyère :

> « *Un beau-père aime son gendre, aime sa bru ; une belle-mère aime son gendre, n'aime point sa bru (...)* »

On rappelle que le beau-père (resp. la belle-mère) est le père (resp. la mère) du conjoint.

2 Logique modale et épistémique

Exercice 5 – Logique modale – *3 points*
On définit la structure de Kripke M (sans fonction d'interprétation) suivante :



1. Indiquez si sur cette structure de Kripke les axiomes T, D, 4, 5 et B sont vérifiés.
2. Avec un langage doté des propositions $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$, définissez une fonction d'interprétation afin que les assertions suivantes soient (toutes) vraies :
   - $M \models (a \vee b \vee c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)$
   - $M \models (a \to (b \vee c)) \wedge (b \to (a \vee c)) \wedge (c \to (a \vee b))$

- $M \models (a \to (\Diamond a \wedge \Diamond \neg a)) \wedge (b \to (\Diamond b \wedge \Diamond \neg b)) \wedge (c \to (\Diamond c \wedge \Diamond \neg c))$

Exercice 6 – Logique épistémique – *3 points*

On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5.

1. Quelle interprétation (en langage naturel) faites-vous de la formule suivante, pour un agent i fixé :

$$\bigwedge_{j \neq i} K_i K_j \phi \wedge \neg K_i \phi$$

2. Montrez que cette formule n'est *pas* satisfiable dans la logique S5.
3. Montrez à l'inverse que la formule

$$\bigwedge_{j \neq i} K_i (K_j \phi \vee K_j \neg \phi) \wedge \neg (K_i \phi \vee K_i \neg \phi)$$

   est satisfiable (un exemple avec deux agents suffira).

Exercice 7 – Modélisation et annonces publiques (Le magicien et l'épicier) — *8 points*

On se place dans cet exercice dans le cadre d'une logique de la connaissance de type S5.

Un chef de royaume réunit en son palais un magicien et un épicier et leur présente sur une table 4 sphères noires, qu'il décrit de la manière suivante :

≪ Voici les quatre sphères du royaume :
- la première pèse 110 grammes (c'est la *légère*),
- la deuxième pèse 130 grammes (c'est la *lourde*),
- les deux restantes pèsent chacune 120 grammes, mais l'une d'elles a des pouvoirs extra-ordinaire (c'est la *magique*, tandis que l'autre est la *normale*). ≫

Le chef propose ensuite le défi suivant au magicien et à l'épicier :

≪ Je vais donner à chacun de vous un paquet contenant deux des sphères. Vous ne verrez pas les sphères à l'intérieur des paquets. Vous pourrez ensuite communiquer l'un après l'autre. Les seules annonces permises sont de la forme *Je (ne) sais (pas) que j'ai (je n'ai pas) la sphère* x. Si vous réussissez après une annonce chacun à savoir quelles sphères sont dans vos paquets, le royaume est à vous. ≫.

Le magicien est incapable d'évaluer le poids de son paquet, mais il capable grâce à ses pouvoirs de ressentir si il contient la sphère magique ou pas. L'épicier, quant à lui, est capable d'évaluer au gramme près le poids total de son paquet. Par contre il n'a aucun moyen de ressentir la présence de la sphère magique.

Vous utiliserez les propositions x_s, avec $x \in \{m, e\}$ et $s \in \{1, 2, 2^*, 3\}$ pour indiquer que la sphère s (1 pour la légère, 2 pour la normale, 2^* pour la magique, 3 pour la lourde) est dans le paquet de x (m pour le magicien, e pour l'épicier).

1. Donnez la structure de Kripke correspondant à la situation initiale décrite dans le problème (avant toute annonce).
2. Donnez une formule indiquant que le magicien et l'épicier ont la connaissance distribuée des sphères qui sont dans leurs paquets. La formule est-elle vérifiée dans la situation initiale ?
3. Imaginons que *dans la situation initiale* l'épicier fasse l'annonce publique :

   ≪ Je ne sais pas que j'ai la sphère magique ≫

   Représentez cette annonce en logique, et indiquez comment la structure est modifiée ensuite.
4. Imaginons que *dans la situation* initiale l'épicier fasse l'annonce publique :

   ≪ Je sais que j'ai la sphère lourde ≫.

   Représentez cette annonce en logique, et indiquez comment la structure est modifiée ensuite.
5. Le magicien et l'épicier peuvent décider qui va parler le premier. L'ordre de parole entre le magicien et l'épicier est-il important ? Justifez votre réponse.

3 Annexe

3.1 Système de Hilbert

Rappel : le système de Hilbert pour la logique des propositions

Le système de Hilbert est caractérisé par trois schémas d'axiomes et une règle d'inférence :
• Schémas d'axiomes :
  SA1 : $A \to (B \to A)$
  SA2 : $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  SA3 : $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
• Règle d'inférence
  Règle : $A, A \to B \vdash B$ (modus ponens)

• La déduction d'une formule A dans une théorie Δ est une suite finie $A_0, \ldots, A_n$ telle que $A_n = A$ et pour tout i,
  • A_i est l'instanciation de l'un des axiomes,
  • A_i est l'une des hypothèses, c'est-à-dire $A_i \in \Delta$
  • A_i est obtenue par modus ponens appliqué à A_j et A_k avec $j < i$ et $k < i$.

On peut aussi appliquer toutes les substitutions nécessaires, à condition de les effectuer dans l'ensemble de la formule.
Si on trouve une telle suite, on peut noter $\Delta \vdash A$

On peut de plus utiliser le théorème de la déduction :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \quad \text{si et seulement si} \quad A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$$

3.2 Méthode des tableaux sémantiques pour la logique des propositions

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

3.2.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés α et β.

Formule α	α_1	α_2
$\neg\neg\varphi$	φ	φ
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	φ_1	φ_2
$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$	φ_1	$\neg\varphi_2$
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$\varphi_1 \to \varphi_2$	$\varphi_2 \to \varphi_1$

Formule β	β_1	β_2
$\varphi_1 \vee \varphi_2$	φ_1	φ_2
$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\varphi_1 \to \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	φ_2
$\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$	$\neg(\varphi_2 \to \varphi_1)$

3.2.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  — si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  — sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  — sinon, choisir une formule F de l'étiquette du nœud
    — si elle est de type α

    - créer un sous-nœud marqué comme non traité
    - lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont les formules obtenues par réécriture de F
  - sinon (si elle est de type β)
    - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
    - leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où β_1 et β_2 sont les formules obtenues par réécriture de F

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.

3.3 Logiques modales

Rappel sur la correspondance entre schémas d'axiomes et propriétés sur les structures de Kripkes.

Nom	**Axiome**	**Propriété**	
T	$\Box\phi \to \phi$	réflexivité :	$\forall w : (w, w) \in R$
D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	sérialité :	$\forall w, \exists w' : (w, w') \in R$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	transitivité :	$\forall w, w', w'' :$ si $(w, w') \in R$ et $(w', w'') \in R$, alors $(w, w'') \in R$
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	euclidienne :	$\forall w, w', w'' :$ si $(w, w') \in R$ et $(w, w'') \in R$, alors $(w', w'') \in R$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	symétrie :	$\forall w, w' :$ si $(w, w') \in R$ alors $(w', w) \in R$